Equivalencia canónica entre teorías de espín 1 masivo*

Pío J. Arias[1,2]** y **Jean C. Pérez-Mosquera[1]**

[1]Grupo de Campos y Partículas, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela (UCV).

[2]Centro de Astrofisica Teórica, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela.

Resumen

Se consideran los modelos de Cremmer-Scherck, generalizado, y el de Proca en dimensiones mayores a 3+1. Se obtiene que el modelo de Proca corresponde al de Cremmer y Scherck con el calibre fijado, además se muestra la equivalencia canónica entre estos.

Palabras clave: Equivalencia canónica; fijación de calibre.

Canonical equivalence between massive spin 1 theories

Abstract

The model of Cremmer-Sherck and Proca are considered in dimensions greater than 3+1. It is obtained that the Proca model corresponds to a gauge fixed version of the Cremmer- Sherck one, and we show their canonical equivalence.

Key words: Canonical equivalence; gauge fixed.

Recibido: 10-09-02 Aceptado: 30-03-04

Introducción

En 3+1 dimensiones espacio-temporales, la acción del modelo de Proca es

$$S = \int_M d^4x\left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\mu^2 2}{2}A_\mu A^\mu\right] \qquad [1]$$

donde $F_{\mu ?} = ?_\mu A_? - ?_\nu A_\mu$ es la intensidad de canpo electromagnético de Maxwell. Esta acción no posee invariancias locales y describe partículas masivas de espín 1.

Otra teoría vectorial que describe espín l en 3+1 dimensionales es la de Cremmer y Scherk, cuya acción, invariante de calibre (1)

$$S^4_{CS} = \int_M d^4x\left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{12\mu^2}\, H^{\mu\nu\lambda}H\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda} - \frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}p\,B_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\right] \qquad [2]$$

donde $H_{\mu??}$ = $?_\mu ?_? \lambda$ + $?\lambda ?_{\mu\nu}$ + $?_\nu ?_{\mu\lambda}$ es la intensidad del campo de Kalb-Ramond

Se puede probar que ambas teorías son equivalentes en regiones del espacio tiempo con topología trivial (2, 3). En este trabajo se generalizarán ambas teorías a d+ 1 dimensiones, usando el dual del potencial de Kalb-Ramond, y se probará que la equivalencia persiste.

Teorías Duales

La acción [1], puede ser escrita a primer orden si introducimos una 2-forma auxiliar (4) $? = ½ ?_{\mu\nu} dx^\mu d\chi^\nu$

$$S_p[A,B] = \int_M d^4x\left[\frac{1}{4}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}B_{\lambda\rho} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{\mu^2}{2}A_\mu A^\mu\right] = -(F,{}^*B) + \frac{1}{2}(B,B) + \frac{\mu^2}{2}(A,A). \qquad [3]$$

donde

$$(\omega,\eta) \equiv \int_M \omega \wedge {}^*\eta \qquad [4]$$

usando la notación de Nakahara (5) para el lenguaje de formas diferenciales.

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de Sp son

$$\begin{aligned} &d^\dagger\, {}^*B - \mu^2 A = 0 \\ &{}^*dA - B = 0 \end{aligned} \qquad [5]$$

Eliminando B de [6] obtenemos las ecuaciones de movimiento de la teoría de Proca

$$d^\dagger F - \mu^2 = 0 \qquad [6]$$

La acción [5] la generalizamos a d+ 1 dimensiones considerando que B es una d-1 forma (3) e introduciendo la 2-forma T= = *?, en lugar de B, como variable de campo. De este modo obtenemos la acción

$$S_p^*[A,T] = -(F,T) - \frac{1}{2}(T,T) + \frac{\mu^2}{2}(A,A) \quad [7]$$

cuyas ecuaciones de movimiento son

$$-d^{+}T + \mu^2 A = 0 \quad dA + T = 0 \qquad [8]$$

La teoría descrita por la acción [7], la llamaremos formulación dual de Proca, Por otro lado, la acción de Cremer y Scherck

$$S_{CS}[A,B] = (F,{*}B) + \frac{1}{2\mu^2}(H,H) + \frac{1}{2}(F,F) \quad [9]$$

puede ser generalizada a d+ 1 dimensiones de la misma manera que Proca (3). Así la formulación dual de la teoría de Cremmer y Scherck estará descrita por la acción

$$S_{Cs}^*[A,B] = (F,T) - \frac{1}{2\mu^2}(h,h) + \frac{1}{2}(F,F) \quad [10]$$

donde T =*?yh = $d^{\dagger}T$ = ?$^{\nu}T\mu_{\nu}d\chi^{\mu}$. Los términos cinéticos de Maxwell y Kalb Ramond, estando solos, describen excitaciones sin masa, Ahora, estando juntos con el término de interacción entre A y T, que es de naturaleza topológica, describen una excitación masiva. Es por esto que nos referimos al modelo de Cremmer y Scherck como topológico masivo (TM).

Las ecuaciones de movimiento asociadas a la acción [10] son:

$$\begin{aligned} &d^{+}(T+F) = 0 \\ &d\left(d^{+}T - \mu^2 A\right) = 0 \end{aligned} \qquad [11]$$

De las ecuaciones [6] y [10] se observa que las soluciones de Proca son soluciones de la TM. Por otra parte, las ecuaciones de la TM son siempre satisfechas si A es cenada y T es cocerrada, Sin embargo, en el caso de Proca, las ecuaciones [6] dicen que T=0 si A es cenada y A=O si T es cocerrada. En consecuencia, existe un sector en el espacio de soluciones clásicas libres de la TM que no está presente en el de Proca, formado por todas las formas no nulas A y T, cerradas (no exactas) y cocerradas (no coexactas) respectivamente. Este sector es de naturaleza topológica, puesto que depende de la estructura topológica de la variedad base. Este sector pertenece al espacio de soluciones clásicas del modelo cuya acción (dual) es,

$$S_{BF} = \frac{1}{2}(F,T) = -\int d^d x \frac{1}{2} T^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \qquad [12]$$

Las ecuaciones de la TM son localmente equivalentes a

$$A - \frac{1}{\mu^2} d^{\dagger} T = d\lambda \qquad [13]$$

$$dA + T = d^{\dagger} \Lambda \qquad [14]$$

Esto también ocurre en regiones donde el primero y el (d-1)-ésimo grupo de cohomología son triviales. En virtud de la invariancia de calibre de la TM, podemos escoger un calibre que absorba a λ y Λ, de modo que λ = 0 y λ = 0 , obteniéndose así las ecuaciones de Proca, luego de esta fijación. Vemos, entonces que el modelo de Proca surge luego de una fijación de calibre en la TM.

Equivalencia canónica

Como se vio en la sección anterior, la acción de Proca se puede escribir en d+1 dimensiones en términos de la 2-forma T = λ * ? de la siguiente manera

$$S_p^{*} = -(F,T) - \frac{1}{2}(T,T) + \frac{\mu^2}{2}(A,A) \qquad [15]$$

$$S_p^{*} = \frac{1}{2}\int d^D x \left[T_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \mu^2 A_\mu A^\mu \right] \qquad [16]$$

Para construir el Hamiltoniano hacemos la descomposición d+1 de la acción [16], i.e,

$$S_P^{*} = \frac{1}{2}\int d^D x \left[\dot{T}_{0i} A_i + T_{0i} \partial_i A_0 + \frac{1}{2} T_{ij} F_{ij} - \frac{1}{2} \right.$$

$$\left. T_{0i} T_{0i} + \frac{1}{4} T_{ij} T_{ij} + \frac{\mu^2}{3} A_0 A_0 - \frac{\mu^2}{2} A_i A_i \right] \qquad [17]$$

donde hemos integrado por partes en el tiempo (***) para tornar corno término cinético a $T_{oi}A_i$ en lugar de $T_{oi}A_i$. De la ecuación [17] vemos que las variables A_o y $T_{ÿ}$ pueden ser consideradas variables no dinámicas, puesto sus velocidades no aparecen en la acción.

Definimos los momentos canónicos conjugados a los campos

$$\Pi_i = \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{A}_i} = 0, \qquad [18]$$

$$p_i = \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{T}_{0i}} = A_i, \qquad [19]$$

donde se observa claramente que no se pueden despejar las velocidades, y en consecuencia obtenemos el siguiente conjunto ? $_a$ = (? $_i$, f $_j$) de 2d vínculos primarios

$$\psi_i = \Pi_i, \qquad [20]$$

$$\varphi_i = P_i - A_i \qquad [21]$$

Estos vínculos definen la superficie G_1 de los vínculos primarios. El Hamiltoniano sobre G_1 es

$$H_p = \int d^d\vec{x}\left[\frac{\mu^2}{2}A_iA_i + \frac{1}{2}T_{0i}T_{0i} + A_0\left(\partial_i T_{0i} - \frac{\mu^2}{2}A_0\right) - \frac{1}{2}T_{ij}\left(F_{ij} + \frac{1}{2}T_{ij}\right)\right]. \qquad [22]$$

Pidiendo ahora que las variaciones de Hp respecto de las variables no dinámicas se anulen

$$\frac{\delta H_p}{\delta T_{ij}} = -\frac{1}{2}\left(F_{ij} + T_{ij}\right) = 0 \qquad [23]$$

$$\frac{\delta H_p}{\delta A_0} = \partial_i T_{0i} - \mu^2 A_0 = 0, \qquad [24]$$

se obtienen expresiones que permiten despejar A_0 y $T_{ÿ}$ en función de las variables canónicas

$$T_{ij} = -F_{ij} \qquad [25]$$

$$A_0 = \frac{1}{\mu^2}\partial_i T_{0i}. \qquad [26]$$

Sustituyendo [25] y [26] en H_p, obtenemos

$$H_p = \int d^d \vec{x} \left[\frac{\mu^2}{2} A_i A_i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2\mu^2} \left(\partial_i T_{0i} \right)^2 + \frac{1}{2} T_{0i} T_{0i} \right]. \qquad [27]$$

La preservación en el tiempo de los vínculos nos conduce a ecuaciones que permiten despejar con los multiplicadores, de modo que el conjunto de vínculos ? $_a$ es de segunda clase.

Los corchetes de Dirac entre los campos A_i y T_{oi} son

$$\left\{ A_i(\vec{x}), T_{oj}(\vec{y}) \right\}^* = -\delta_{ij} \delta^d \left(\vec{x} - \vec{y} \right). \qquad [28]$$

La acción de Cremmer y Scherk en su formulación dual, se escribe en el lenguaje de formas de la siguiente manera

$$S^{*}_{CS} = (F, T) + \frac{1}{2}(F, F) - \frac{1}{2\mu^2}(h, h) \qquad [29]$$

$$\approx \int d^D x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2\mu^2} h_\mu h^\mu \right] \qquad [30]$$

Para hacer el análisis canónico procedemos a realizar la descomposición d+1 de la acción [30], i.e.,

$$S_{CS} = \int d^D x \left[\frac{1}{2} F_{0i} F_{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - \frac{1}{2\mu^2} h_0 h_0 + \frac{1}{2\mu^2} h_i h_i + T_{0i} F_{0i} - \frac{1}{2} T_{ij} F_{ij} \right]. \qquad [31]$$

de aquí se observa que A_o $T_{ÿ}$ se pueden considerar no dinámicas, por la ausencia de sus velocidades en la acción. Partimos de la definición de los momentos canónicos conjugados a los campos

$$\Pi_i \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{A}_i} = F_{0i} + T_{0i} = \dot{A}_i - \partial_i A_0 + T_{0i}, \qquad [32]$$

$$pi = \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{T}_{0i}} = \frac{1}{\mu^2} H_i = \frac{1}{\mu^2}\left(\dot{T}_{0i} + \partial_j T_{ij}\right), \qquad [33]$$

donde se pueden despejar con las velocidades

$$\dot{A}_i = \Pi_i + \partial_i A_0 - T_{0i}, \qquad [34]$$

$$\dot{T}_{0i} = \mu^2 pi - \partial_j T_{ij}. \qquad [35]$$

Ahora procedemos a construir el Hamiltoniano,

$$H = \int d^d x \left[\frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\mu^2}{2} pipi - \Pi_i T_{0i} + \frac{1}{2} T_{0i} T_{0i} + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2\mu^2} H_0 H_0 + \frac{1}{2} T_{ij}\left(F_{ij} + \tilde{F}_{ij}\right) + A_0\left(-\partial_i \Pi_i\right)\right]. \qquad [36]$$

donde . $\tilde{F}_{ij} = \partial_i p_j - \partial_j p_i$.

Exigiendo que las variaciones de H respecto de los campos no dinámicos se anulen obtenemos el conjunto de vínculos **T**$_a$ = (?,?$_{ÿ}$), donde

$$\theta = -\partial_i \Pi_i = 0 \qquad [37]$$

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2}\left(F_{ij} - \tilde{F}_{ij}\right). \qquad [38]$$

Se puede ver que el conjunto T a es de primera clase y las transformaciones de calibre generadas por estos son

$$\delta A_i(x) = \partial_i \xi \qquad [39]$$

$$\delta T_{0i}(x) = \partial_j \xi_{ij} \qquad [40]$$

El Hamiltoniano que genera la dinámica será

$$\tilde{H}_{TM} = \int d^d x \left[\frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\mu^2}{2} pipi - \Pi_i T_{0i} + \frac{1}{2} T_{0i} T_{0i} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2\mu^2} h_0 h_0 + \lambda^a \Theta_a \right], \qquad [41]$$

donde ?^{a} ={A_0,$T_{ÿ}$} son los multiplicadores indeterminados de Lagrange asociados a los vínculos ? y ?$_{ÿ}$.

Vamos ahora a probar la equivalencia antes mencionada desde el punto de vista Hamiltoniano. El Hamiltoniano de la teoría de Proca en d+1 dimensiones, una vez eliminadas las variables no dinámicas, es

$$H_{TM} = \int d^d x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{1}{2\mu^2} (\partial_i T_{0i})^2 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} T_{0i} T_{0i} + \frac{\mu^2}{2} A_i A_i \right] \qquad [42]$$

sujeto a los vínculos de segunda clase ? $_a$ = (? $_i$, f $_j$)

$$\psi_i = \Pi_i, \qquad [43]$$

$$\varphi_i = p_i - A_i \cdot \qquad [44]$$

Los corchetes de Poisson no nulos entre los v ínculos son

$$\left\{ \psi_i(\vec{x}), \varphi_j(\vec{y}) \right\} = \delta_{ij} \delta^d (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \qquad [45]$$

Podemos interpretar a la mitad de estos corno vínculos de primera clase y la otra mitad como fijaciones de calibre. En lugar del conjunto ? $_a$, tomaremos el conjunto ?$_a$ = (?$_a$,?$_a$) , siendo ?$_a$ = (?^{T} - ?$_i$f $_i$) respectivamente, la parte transversa de ? y la parte longitudinal de . Este nuevo conjunto de vínculos es completamente equivalente al primero en regiones del espacio con topología trivial. Tenemos, entonces, que el conjunto de vínculos de la teoría de Proca se puede separar en los de la de Cremmer y Scherck más otra parte que pueden interpretarse como fijaciones de calibre. Buscamos un Hamiltoniano invariante de calibre de la forma (3, 6).

$$\tilde{H}_p = H_p + \int d^3 \vec{x} \left[\alpha_a(\vec{x}) \Theta_a(\vec{x}) + \beta_a \Phi_a(\vec{x}) \right.$$
$$\left. + \int d^3 \vec{y} \beta_{ab}(\vec{x}, \vec{y}) \Phi_a(\vec{x}) \Phi_b(\vec{y}) \right] \qquad [46]$$

que difiere del de Proca por combinaciones de los vínculos.

Para hallar los coeficientes a`s y ß`s exigimos que los corchetes de este Hamiltoniano con los vínculos de primera clase sean débilmente cero. Esto nos va a conducir a una familia de Hamiltonianos invariantes de calibre, puesto que los a`s no quedarán determinados por la condición antes mencionada, sin embargo, podemos probar que el Hamiltoniano de Scs es uno de esta familia, sin observando que

$$H_{TM}^{d+1} - H_{P}^{d+1} = \frac{1}{2}\Pi_i\Pi_i + \frac{\mu^2}{2} pipi + T_{0i}\Pi_i + \frac{\mu^2}{2} A_i A_i \qquad [47]$$

$$= \frac{1}{2}\psi_i\psi_i + T_{0i}\psi_i + \frac{\mu^2}{2}\varphi_i\varphi_i + \mu^2 A_i\varphi_i \cdot \qquad [48]$$

Con esto, queda probada la equivalencia canónica, que como dijimos está sujeta a la cohomología de la variedad base. En otra dirección, puede verse que la función de partición de estos modelos difieren de un factor que corresponde a la función de partición de la acción S_{BF}. La presencia de este factor se hará sentir en el momento de calcular valores esperados de los objetos sensibles a la topología del espacio tiempo. En este sentido, la descripción a través de S_p o S_{cs} podrá ser distinta.

Referencias Bibliográficas

1. CREMMER E., SCHERK J. **Nucl Phys** B72: 117-124, 1974.

2. ALLEN T.J., BOWICK M.J., LAHIRI A. **Mod Phys Lett** A6: 559-572, 1991.

3. ARIAS P.J., LEAL L. **Phys Lett** B404: 49-56, 1997.

4. FREEDMAN D.Z., TOWSEND P.K. **Nucl Phys** B77: 282-296, 1981.

5. NAKAHARA M. **Geometry Topology and Physics**, IOP Publishing Ltd. Capítulo 5, 1995.

6. GIANVITTORIO R., RESTUCCIA A., STEPHANY J. **Mod Phys Lett** A6: 2121-2128, 1991.

---

* Trabajo presentado en el Segundo Congreso Venezolano de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de Oriente. Cumaná, 2000.

** Autor para la correspondencia. E-mail: parias @fisica.ciens.ucv.ve

*** Supondremos en todo el trabajo que los campos se anulan en la frontera de la región de integración, por lo tanto, los términos de borde no contribuyen.