

Sistemas de Puesta a Tierra

Parte 5

Deducción de las funciones de Green empleadas para calcular el potencial en cualquier punto del suelo

Octubre 2023

Rev. enero 2024

Napoleón Malpica A.

Contenido

	Deducción de las funciones de Green empleadas para calcular el potencial en cualquier punto del suelo	4
1.	Introducción.	4
2.	Función de Green para calcular el Potencial escalar en un medio infinito formado por dos estratos o capas como lo forman el aire y la tierra y en régimen estacionario $\partial/\partial t = 0$. (En este caso se asume que el suelo es homogéneo).	6
3.	Función de Green para calcular el potencial escalar en un medio infinito formado por tres estratos, teniendo como fuente una corriente puntual situada en el segundo estrato	16
4.	Función de Green para calcular el potencial en un medio infinito formado por tres estratos, teniendo como fuente una corriente en un punto situado en el tercer estrato.	23
	<u>Referencias</u>	28

Deducción de las funciones de Green empleadas para calcular el potencial en cualquier punto del suelo

1. Introducción.

En los apuntes titulados Sistemas de Puesta a Tierra. Parte 3 y Parte 4, se presenta un método de integración para resolver la ecuación de Laplace y que se utiliza para calcular tanto el potencial de cualquier punto del suelo, como la resistencia de los electrodos de puesta a tierra. El método en cuestión tiene como sustento la segunda identidad de Green, particularmente consiste en el uso de las funciones de Green que son muy útiles para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Sin embargo, en los apuntes en cuestión, a pesar de que se presentan numerosos ejemplos de cálculo de electrodos de puestas a tierra, tanto para suelo homogéneo como para suelos formados por dos estratos, no se explica cómo se obtienen dichas funciones; entonces para superar esta barrera, se presenta, en esta parte de los apuntes, la deducción analítica de dichas funciones.

A pesar de que en estos apuntes se presenta la deducción de las funciones de Green para suelos formados por dos capas, la metodología presentada puede ser utilizada para deducir las funciones de Green en el caso que se quiera modelar el suelo por más de dos estratos o capas.

Para calcular la resistencia de un sistema de puesta a tierra, así como las tensiones de toque y paso, se requiere conocer los potenciales en cualquier punto del suelo. Para obtener los potenciales, en la tierra, es necesario resolver la ecuación de Laplace para el potencial escalar V en régimen estacionario:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1-1)$$

Uno de los métodos para resolver la ecuación diferencial anterior consiste en aplicar un método de integración, donde se emplean las funciones de Green. Por ejemplo, la expresión matemática para calcular el potencial escalar V , producido por una carga puntual q en un medio infinito y homogéneo es muy conocida y viene dado por la siguiente ecuación:

$$V(x, y, z) = \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \right) \frac{q(x',y',z')}{\epsilon} \quad (1-2)$$

donde (x, y, z) son las coordenadas donde se quiere evaluar el potencial y (x', y', z') son las coordenadas donde se encuentra la carga.

Si en lugar de tener una carga puntual se tuviera una densidad volumétrica de carga, se puede usar nuevamente la ecuación (1-2) pero sumando la contribución que produce cada diferencial de carga al potencial:

$$V(x, y, z) = \int_{Vol} \left(\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \right) \frac{\rho(x',y',z')}{\epsilon} dv' \quad (1-3)$$

Donde la integración se realiza en el volumen donde se encuentra la densidad volumétrica de carga y dv' es un diferencial de volumen.

La ecuación (1-3) es solución de la ecuación de Laplace (1-1), para un medio infinito y homogéneo. Nótese de la ecuación (1-3) que, si se conoce la densidad volumétrica de carga, el potencial en el espacio está completamente definido.

La ecuación (1-3) se puede también representar como la integral del producto de una función por la densidad volumétrica de carga, donde la carga es la responsable de crear el campo eléctrico en el medio:

$$V(x, y, z) = \int_{Vol} f_{Green}(x, y, z, x', y', z') \frac{\rho(x',y',z')}{\epsilon} dv' \quad (1-4)$$

En la ecuación anterior, f_{Green} se conoce como la función de Green y para un medio infinito y homogéneo viene dado por la siguiente expresión que se extrae de (1-2):

$$f_{Green}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \quad (1-5)$$

Nótese que la función de Green anterior es la misma ecuación del potencial dada por (1-2) pero sin incluir ni la carga ni la permitividad del medio.

Si el medio no es homogéneo o si es homogéneo por capas, como sucede en la tierra, la función de Green a utilizar difiere a la mostrada en la ecuación (1-5).

En este trabajo se deducen las funciones de Green para medios infinitos formados por dos estratos y tres estratos, considerando que en ambos casos el primer estrato es el aire.

La forma típica de obtener la función de Green para un medio compuesto por más de un estrato consiste en calcular el potencial producido por una carga puntual situada en uno de los estratos, de la solución obtenida se extrae la función de Green tal como sucede al comparar las ecuaciones (1-2) con (1-5).

Por último, como este trabajo está destinado al estudio de sistemas de puesta a tierra, en lugar de trabajar con una carga puntual q como fuente del campo eléctrico, se trabajará con una inyección puntual de corriente i ; más adelante se explica la razón física que permite hacer este cambio.

2. Función de Green para calcular el Potencial escalar en un medio infinito formado por dos estratos o capas como lo forman el aire y la tierra y en régimen estacionario ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). (En este caso se asume que el suelo es homogéneo).

En el presente capítulo se determina la función de Green, necesaria para calcular el potencial V , para un medio infinito formado por dos estratos. Para deducir la función de Green, se parte de las ecuaciones de Maxwell (Jackson, 1975), asumiendo que existe un fenómeno estacionario del campo electromagnético, o en otras palabras, que el campo no varía con el tiempo:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2-4)$$

Donde \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{H} y \mathbf{J} son los vectores desplazamiento eléctrico, campo eléctrico, densidad de flujo magnético, campo magnético y densidad de corriente respectivamente.

Por las propiedades del medio, algunas cantidades vectoriales están relacionadas entre sí:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2-5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2-6)$$

De la ecuación (2-4), por tener el campo eléctrico el rotacional nulo, el mismo se puede definir como el gradiente de una función potencial escalar V :

$$\mathbf{E} = -\nabla \cdot V \quad (2-7)$$

Al sustituir (2-6) en (2-1) se obtiene:

$$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \quad (2-8)$$

Donde se considera que la densidad de carga ρ es nula en la tierra ya que, por ser el medio conductor, las cargas con polaridades opuestas se recombinan y las cargas de igual polaridad se repelen entre ellas y terminan alejándose entre sí.

Si el medio es homogéneo por capas, isotrópico y lineal, entonces (2-8) se convierte en lo siguiente:

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (2-9)$$

Al sustituir la ecuación (2-7) en (2-9) se obtiene lo siguiente:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2-10)$$

Al resolver la ecuación anterior se obtiene el potencial en cualquier punto del espacio.

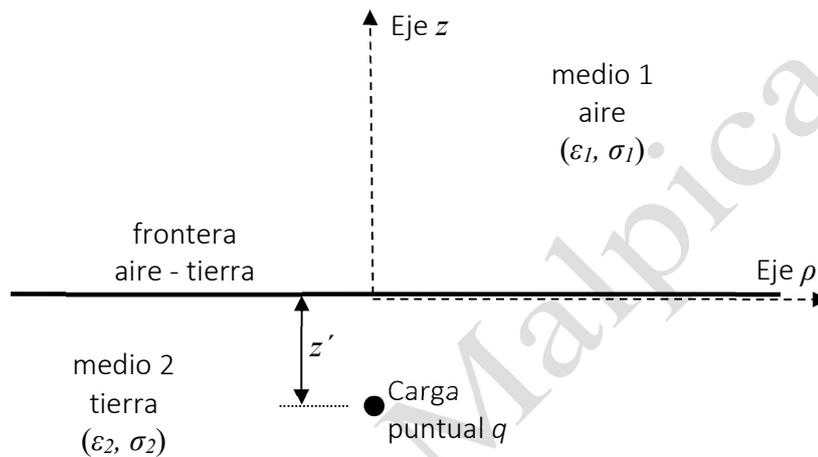


Fig. 1 Medio infinito formado por dos estratos.

Para resolver (2-10) se asume que en el medio 2 existen dos campos, uno creado directamente por una carga puntual, ver la fig. 1 y el otro campo que se crea por la reflexión y la transmisión del campo eléctrico que ocurre en la frontera que existe entre los dos medios.

Asumiendo coordenadas cilíndricas, la ecuación de Laplace (2-10), aplicada en el medio 1, se convierte en la siguiente ecuación (Stinson, 1976):

$$\nabla^2 V_1 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V_1}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V_1 = 0 \quad (2-11)$$

donde ρ y z son las variables de posición en coordenadas cilíndricas y V_1 es el potencial de un punto que se encuentra en el primer estrato.

Como la carga puntual mostrada en la figura 1, se encuentra situada sobre el eje z , se asume que, por la simetría presentada, el potencial V_1 en coordenadas cilíndricas, no depende del ángulo ϕ .

Aplicando el método de separación de variables, el potencial se define como el producto de dos funciones:

$$V_1 = R_1(\rho) Z_1(z) \quad (2-12)$$

Al sustituir (2-12) en (2-11):

$$Z_1 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right) + R_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z_1 = 0 \quad (2-13)$$

Reordenando la ecuación anterior e introduciendo la variable de separación a^2 :

$$\frac{1}{R} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R_1}{\partial \rho} \right) + a^2 + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2}{\partial z^2} Z - a^2 = 0 \quad (2-14)$$

De la anterior se obtienen dos ecuaciones diferenciales desacopladas:

$$\frac{d^2}{dz^2} Z - a^2 Z = 0 \quad (2-15)$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2} R + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} R + a^2 R = 0 \quad (2-16)$$

Al multiplicar la ecuación anterior por ρ^2 :

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} R + \rho \frac{d}{d\rho} R + (a \cdot \rho)^2 R = 0 \quad (2-17)$$

Y operando con el diferencial:

$$d(a\rho) = a d\rho \quad (2-18)$$

$$(d(a\rho))^2 = a^2 d\rho^2 \quad (2-19)$$

Al sustituir (2-18) y (2-19) en (2-17) se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$(a\rho)^2 \frac{d^2}{(d(a\rho))^2} R + (a\rho) \frac{d}{d(a\rho)} R + (a\rho)^2 R = 0 \quad (2-20)$$

La anterior es una ecuación diferencial de Bessel, de orden cero, cuya solución (Spiegel, 1998) es la siguiente:

$$R_1 = A J_0(a\rho) + B Y_0(a\rho) \quad (2-21)$$

Y para la ecuación diferencial (2-15), su solución es la siguiente:

$$Z_1 = C e^{az} + D e^{-az} \quad (2-22)$$

Entonces se obtiene el potencial V_1 para cualquier punto situado en el primer estrato con las ecuaciones (2-12), (2-21) y (2-22):

$$V_1(\rho, z) = (A J_0(a\rho) + B Y_0(a\rho))(C e^{az} + D e^{-az}) \quad (2-23)$$

En la ecuación anterior, A , B , C y D son funciones de la variable a , funciones que se determinan de las condiciones de fronteras.

Para que el potencial V_1 sea finito en $\rho = 0$, entonces B debe ser nulo ya que la función de Bessel Y_0 tiende a infinito si se evalúa en cero; reordenando la ecuación anterior:

$$V_1(\rho, z) = A'(a) J_0(a\rho)e^{az} + B'(a) J_0(a\rho)e^{-az} \quad (2-24)$$

Para que V_1 sea nulo, si z tiende a infinito, entonces la función $A'(a)$ que se muestra en la ecuación anterior, debe ser nula. Dado lo anterior, la solución del potencial, considerando todos los valores posibles que puede tomar la variable a , es la siguiente:

$$V_1(\rho, z) = \int_0^\infty B'(a) J_0(a\rho)e^{-az} da \quad (2-25)$$

Análogamente, para calcular el potencial en el medio 2, el mismo debe ser nulo en el infinito ($z = -\infty$); entonces se puede utilizar nuevamente la ecuación (2-24) a sabiendas que en el medio 2 se encuentra una carga puntual que es la fuente o la que origina el campo eléctrico en los dos medios. La solución general para el medio 2 es la siguiente:

$$V_2(\rho, z) = \int_0^\infty C'(a) J_0(a\rho) e^{a.z} da + \frac{q(x',y',z')}{4\pi \epsilon_2 \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \quad (2-26)$$

donde x, y, z son las coordenadas donde se quiere evaluar el potencial; x', y', z' son las coordenadas donde se encuentra la carga puntual q , y la variable de posición ρ , en coordenadas cilíndricas, viene dada por:

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \quad (2-27)$$

En la ecuación (2-26), el término que está después de la integral es la expresión que permite calcular el potencial debido a una carga puntual (1-2) en un medio infinito y homogéneo (John, 1996); la carga puntual es la fuente del campo eléctrico, pero en este caso se puede reemplazar la carga por una corriente inyectada en un punto del suelo o del estrato 2.

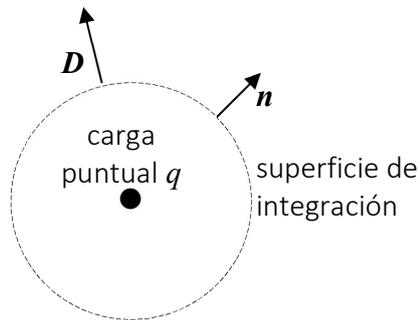


Fig. 2 carga puntual encerrada en una esfera virtual.

Al aplicar (2-1) (2-1) a un pequeño volumen limitado por una esfera, que contiene la carga q , como se muestra en la figura 2:

$$\int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \int_{vol} \rho dv = q \quad (2-28)$$

Al aplicar el teorema de Gauss en la ecuación anterior y al usar (2-6):

$$\oint_{sup} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds \leftrightarrow \epsilon_2 \int_{sup} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds \quad (2-29)$$

donde \mathbf{n} es un vector normal a la superficie de integración que encierra la carga q .

Teniendo en cuenta (2-5) en la ecuación anterior:

$$\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \oint \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds = q \quad (2-30)$$

donde la integral en una superficie cerrada de la densidad de corriente es la corriente i que sale de la carga puntual, de esta forma la ecuación anterior se reduce a lo siguiente:

$$q = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} i \quad (2-31)$$

Al sustituir la ecuación anterior en (2-26):

$$V_2(\rho, z) = \int_0^\infty C'(a) J_0(a\rho) e^{a z} da + \frac{i}{4\pi \sigma_2 \sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \quad (2-32)$$

En la ecuación anterior, el potencial producido por la carga puntual q , o por la corriente i que sale de la carga, puede considerarse como una onda esférica que se puede convertir en la suma de infinitas ondas cilíndricas (Sommerfeld, 1949):

$$\frac{e^{-\gamma r}}{r} = \int_0^{\infty} \frac{u J_0(\rho u) e^{-\sqrt{u^2 + \gamma^2} |z - z'|}}{\sqrt{u^2 + \gamma^2}} du \quad (2-33)$$

donde γ es una constante y r es la variable de posición en coordenadas esféricas:

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (2-34)$$

Entonces si $\gamma = 0$, (2-33) se convierte en:

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} = \int_0^{\infty} e^{-u|z - z'|} J_0(\rho u) du \quad (2-35)$$

Al introducir la ecuación anterior en (2-32) se obtiene lo siguiente:

$$V_2(\rho, z) = \int_0^{\infty} J_0(a\rho) \left(C'(a) e^{az} + \frac{i e^{-a|z - z'|}}{4\pi \sigma_2} \right) da \quad (2-36)$$

Con las ecuaciones (2-25) y (2-36) se puede calcular el potencial en cualquier estrato, si las funciones $B'(a)$ y $C'(a)$ son conocidas y en el caso que no sean conocidas se obtienen al aplicar las condiciones de frontera.

Al calcular la divergencia de la ecuación (2-4), se obtiene lo siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2-37)$$

Si la ecuación anterior se aplica sobre una pequeña superficie cerrada que encierra un pequeño volumen y que se encuentra en el límite entre dos medios:

$$\int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{J} dV = \oint_{sup} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (2-38)$$

Donde se concluye que en la frontera se debe cumplir que:

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (2-39)$$

donde \mathbf{n} que es un vector unitario en la dirección de z .

La otra condición de frontera se obtiene al aplicar la ecuación (2-2) sobre un camino de integración que encierra ambos medios y que se muestra en la figura 3.

Al integrar (2-2) sobre una superficie y al aplicar el teorema de Stokes (Spiegel, 1998):

$$\int_{sup} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} ds = \oint \mathbf{E} \cdot d\vec{l} \quad (2-40)$$

donde $d\vec{l}$ es un vector diferencial de longitud y \mathbf{n} es un vector unitario normal al plano de la figura.

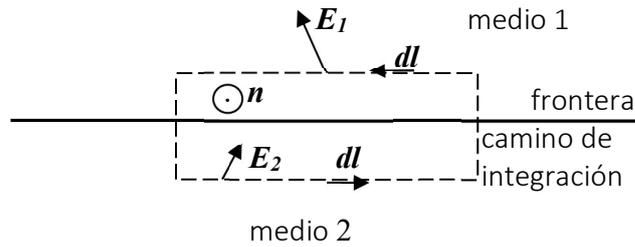


Figura 3 Superficie limitada por un camino de integración, situada entre la frontera de dos medios

De la ecuación anterior se concluye que se debe cumplir con la siguiente relación para el campo eléctrico, en la frontera:

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{n} \quad (2-41)$$

Cálculo del gradiente del potencial V en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial \rho} \mathbf{a}_\rho + \frac{\partial V}{\partial z} \mathbf{a}_z \quad (2-42)$$

Al substituir (2-25) en (2-42) se obtiene el gradiente de potencial para el estrato 1:

$$\nabla V_1 = -\left(\int_0^\infty a B'(a) J_1(a\rho) e^{-az} da\right) \mathbf{a}_\rho - \left(\int_0^\infty a B'(a) J_0(a\rho) e^{-az} da\right) \mathbf{a}_z \quad (2-43)$$

Y al substituir (2-36) en (2-42) se obtiene el gradiente de potencial para el estrato 2:

$$\begin{aligned} \nabla V_2 = & -\left(\int_0^\infty J_1(a\rho) \left(C'(a) e^{az} + \frac{i e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_2}\right) a da\right) \mathbf{a}_\rho + \dots \\ & + \left(\int_0^\infty J_0(a\rho) a \left(C'(a) e^{az} - \frac{i e^{-a|z-z'|} \text{sign}(z-z')}{4\pi\sigma_2}\right) da\right) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (2-44)$$

donde $\text{sign}(x)$ es la función signo.

Al aplicar la condición de frontera (2-41) a las ecuaciones (2-43) y (2-44), teniendo en cuenta (2-7), y evaluada en $z = 0$:

$$\int a B'(a) J_1(a\rho) da = \int a J_1(a\rho) \left(C'(a) + \frac{i e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_2}\right) da \quad (2-45)$$

De donde se obtiene la siguiente relación:

$$B'(a) = C'(a) + \frac{i e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_2} \quad (2-46)$$

Al aplicar la condición de frontera (2-39), usando las ecuaciones (2-43) y (2-44), teniendo en cuenta (2-5) y (2-7) evaluada en $z = 0$.

$$\sigma_1 \int_0^\infty B'(a) a J_0(a\rho) da = \sigma_2 \int_0^\infty J_0(a\rho) a \left(\frac{i e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_2} - C'(a) \right) da \quad (2-47)$$

De donde se obtiene otra relación:

$$\sigma_1 B'(a) = \frac{\sigma_2 i e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_2} - \sigma_2 C'(a) \quad (2-48)$$

Con las ecuaciones (2-46) y (2-48) se obtiene $C'(a)$ y $B'(a)$:

$$C'(a) = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_2} i \quad (2-49)$$

$$B'(a) = \frac{2e^{-a|z-z'|}}{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)} i \quad (2-50)$$

Al substituir (2-50) en (2-25) se obtiene el valor de V_1 :

$$V_1(\rho, z) = \frac{2i}{4\pi(\sigma_2 + \sigma_1)} \int_0^\infty J_0(a\rho) e^{-a(z-z')} da \quad (2-51)$$

Usando la ecuación (2-35) en la ecuación anterior y considerando que $z > 0$, se obtiene lo siguiente:

$$V_1(\rho, z) = \left(\frac{2}{4\pi(\sigma_2 + \sigma_1)\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \right) i \quad (2-52)$$

Al substituir (2-49) en (2-36) se obtiene V_2 :

$$V_2(\rho, z) = \frac{i}{4\pi\sigma_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} + \left[\int_0^\infty J_0(a\rho) e^{-a(-z-z')} da \right] \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \right) \quad (2-53)$$

Al usar (2-35) en la ecuación anterior:

$$V_2(\rho, z) = \left(\frac{1}{4\pi\sigma_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+z')^2}} \right) \right) i \quad (2-54)$$

Utilizando las ecuaciones (2-52) y (2-54), se puede calcular el potencial en cualquier punto, para un medio biestratificado, asumiendo un fenómeno estacionario del campo electromagnético, teniendo como fuente un punto que inyecta corriente en el medio 2 (ver figura 1).

Se define el coeficiente de reflexión Γ_{12} que existe entre las fronteras formadas por los medios 1 y 2 como:

$$\Gamma_{12} = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \quad (2-55)$$

Entonces la ecuación (2-54) queda de la siguiente forma:

$$V_2(\rho, z) = \left(\frac{1}{4\pi\sigma_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} + \Gamma_{12} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+z')^2}} \right) \right) i \quad (2-56)$$

Si en lugar de conocer las conductividades de ambas capas, se conocen las resistividades ρ , entonces el coeficiente de reflexión vendrá dado por:

$$\Gamma_{12} = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \quad (2-57)$$

Ahora bien, si el primer estrato es el aire, donde la conductividad del aire se puede considerar nula, entonces el coeficiente de reflexión dado por (2-55) es igual a la unidad, en este caso y al usar (2-27), el potencial tanto en el aire como en la tierra vendrá dado por las siguientes expresiones

$$V_1(x, y, z, x', y', z') = \left(\frac{1}{2\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) \frac{i}{\sigma_2} \quad (2-58)$$

$$V_2(x, y, z, x', y', z') = \left(\frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right) \frac{i}{\sigma_2} \quad (2-59)$$

Los términos encerrados en paréntesis que acompañan a la corriente i en las ecuaciones (2-58) y (2-59), son las funciones de Green que permiten calcular el potencial en un medio infinito, formado por dos estratos, si la corriente inyectada i es conocida.

$$fGreen_{12}^{2est}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{2\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (2-60)$$

La función de Green anterior fue extraída de la ecuación (2-58), esta función de Green permite obtener el potencial de cualquier punto que se encuentra en el aire (estrato 1) si se inyecta corriente por la tierra que es el estrato 2.

La ecuación anterior es muy útil si se quiere calcular el potencial de cualquier punto que se encuentre en el estrato 1 o en el aire, si se tiene un electrodo cilíndrico, enterrado en el suelo, que se encuentre inyectando una corriente en la tierra:

$$V_1(x, y, z) = \frac{1}{\sigma_2} \int fGreen_{12}^{2est}(x, y, z, x', y', z') i(x', y', z') d\ell \quad (2-61)$$

donde la integral es de línea y que se realiza a lo largo o en la dirección axial del electrodo y:

$i(x', y', z')$ Es la densidad de corriente que el electrodo drena a tierra (A/m).

$d\ell$ Es un diferencial de longitud (m).

(x', y', z') Son las coordenadas de un punto del eje del electrodo, en metros.

De la ecuación (2-59) se puede extraer otra función de Green:

$$fGreen_{22}^{2est}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{1}{4\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \quad (2-62)$$

La función de Green anterior permite obtener el potencial de cualquier punto que se encuentre en el estrato 2 o en la tierra, si se inyecta corriente por el mismo estrato:

$$V_2(x, y, z) = \frac{1}{\sigma_2} \int fGreen_{22}^{2est}(x, y, z, x', y', z') i(x', y', z') d\ell \quad (2-63)$$

En el documento *Sistemas de puesta a tierra. Parte 3.* se presentan numerosos ejemplos de cómo calcular la resistencia en electrodos cilíndricos y como se puede obtener las curvas equipotenciales en la superficie del suelo, usando las funciones de Green (2-62) y (2-63), funciones que son adecuadas cuando se modela el suelo como un medio homogéneo.

3. Función de Green para calcular el potencial escalar en un medio infinito formado por tres estratos, teniendo como fuente una corriente puntual situada en el segundo estrato

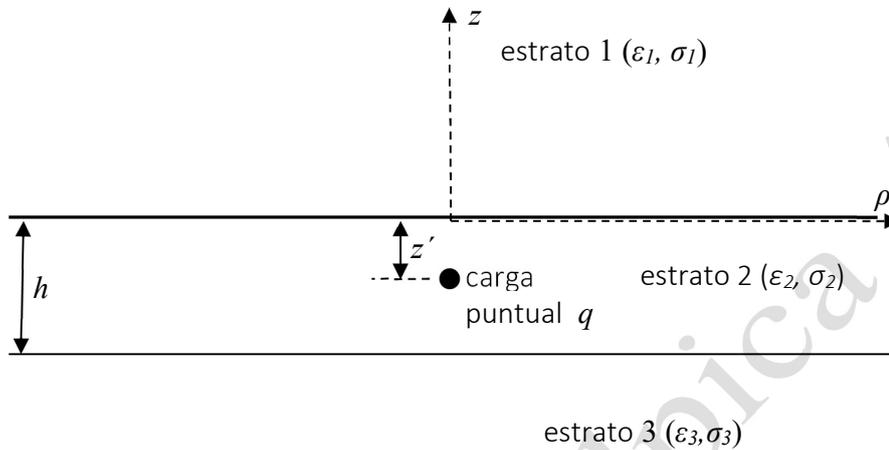


Figura 3 Medio infinito formado por tres estratos con una carga puntual ubicada en el segundo estrato

La Figura 3 muestra un medio infinito formado por tres estratos, el primer estrato es el aire y los estratos 2 y 3 son las dos capas que forman el suelo, en este caso el suelo deja de ser un medio homogéneo y se considera que está formado entonces por dos estratos.

Como punto de partida, se utiliza la misma solución general para el potencial, dada por la ecuación (2-25) y que se obtuvo para un medio formado por dos estratos. Para la primera capa o estrato, el potencial escalar \$V_1\$, viene dado por la siguiente expresión:

$$V_1(\rho, z) = \int_0^\infty A(a) J_0(a\rho) e^{-a.z} da \quad (3-1)$$

donde \$z > 0\$

Para la segunda capa o estrato el potencial vendrá dado por la siguiente expresión:

$$V_2(\rho, z) = \int_0^\infty J_0(a\rho) (B(a) e^{-a.z} + C(a) e^{a.z}) da + \frac{1}{4\pi\sigma_2\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} i \quad (3-2)$$

donde \$h > 0, 0 > z' > -h, 0 > z > -h\$, \$h\$ es el espesor de la capa o del estrato 2 que se muestra en la figura 3

Si se emplea (2-35) en la ecuación anterior, el potencial en el segundo estrato queda así:

$$V_2(\rho, z) = \int_0^\infty J_0(a\rho) \left(B(a) e^{-az} + C(a) e^{az} + \frac{e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_2} i \right) da \quad (3-3)$$

Para la tercera capa, que tiene un espesor infinito, el potencial viene dado por:

$$V_3(\rho, z) = \int_0^\infty D(a) J_0(a\rho) e^{az} da \quad (3-4)$$

donde $z < -h$

Se calcula el gradiente del potencial escalar a las ecuaciones (3-1), (3-3) y (3-4) usando (2-42), para luego aplicar las condiciones de fronteras.

Para la primera capa o estrato 1 usando (3-1):

$$\nabla V_1(\rho, z) = \left(- \int_0^\infty a A(a) J_1(a\rho) e^{-az} da \right) \mathbf{a}_\rho - \left(\int_0^\infty a A(a) J_0(a\rho) e^{-az} da \right) \mathbf{a}_z \quad (3-5)$$

Para el estrato 2, usando (3-3):

$$\begin{aligned} \nabla V_2(\rho, z) = & \left(- \int_0^\infty a J_1(a\rho) \left(B(a) e^{-az} + C(a) e^{az} + \frac{i e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_2} \right) da \right) \mathbf{a}_\rho + \dots \\ & + \left(\int_0^\infty a J_0(a\rho) \left(C(a) e^{az} - B(a) e^{-az} - \frac{i \operatorname{sign}(z-z') e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_2} \right) da \right) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (3-6)$$

Y para el estrato 3, usando (3-4):

$$\nabla V_3 = \left(- \int_0^\infty a J_1(a\rho) D(a) e^{az} da \right) \mathbf{a}_\rho + \left(\int_0^\infty a J_0(a\rho) D(a) e^{az} da \right) \mathbf{a}_z \quad (3-7)$$

Con las ecuaciones (3-5), (3-6) y (3-7), se puede obtener el campo eléctrico y la densidad de corriente usando (2-5) y (2-7).

Condiciones de Frontera para el plano $z = 0$

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{a}_z \quad (3-8)$$

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{a}_z = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{a}_z \quad (3-9)$$

Condiciones de frontera para el plano $z = -h$

$$\mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{a}_z = \mathbf{J}_3 \cdot \mathbf{a}_z \quad (3-10)$$

$$\mathbf{E}_2 \times \mathbf{a}_z = \mathbf{E}_3 \times \mathbf{a}_z \quad (3-11)$$

Al aplicar la condición de frontera (3-8), usando (3-5), (3-6), (2-7) y (2-5), evaluada en la coordenada $z = 0$ se obtiene la siguiente igualdad:

$$\sigma_1 \int_0^{\infty} a A(a) J_0(a\rho) da = \sigma_2 \int_0^{\infty} a J_0(a\rho) \left(B(a) - C(a) + \frac{ie^{-a|-z'|}}{4\pi\sigma_2} \right) da \quad (3-12)$$

De la ecuación anterior se extrae la siguiente igualdad:

$$\sigma_1 A(a) = \sigma_2 \left(B(a) - C(a) + \frac{ie^{-a|-z'|}}{4\pi\sigma_2} \right) \quad (3-13)$$

Al aplicar la condición de frontera (3-9), usando las ecuaciones (3-5), (3-6) y (2-7), se obtiene otra igualdad:

$$\int_0^{\infty} a J_1(a\rho) A(a) da = \int_0^{\infty} a J_1(a\rho) \left(B(a) + C(a) + \frac{ie^{-a|-z'|}}{4\pi\sigma_2} \right) da \quad (3-14)$$

De la ecuación anterior se extrae otra relación:

$$A(a) = \left(B(a) + C(a) + \frac{ie^{-a|-z'|}}{4\pi\sigma_2} \right) \quad (3-15)$$

Al aplicar la condición de frontera dada por (3-10), usando las ecuaciones (3-6), (3-7), (2-5) y (2-7):

$$\begin{aligned} \sigma_2 \int_0^{\infty} a J_0(a\rho) \left(B(a) e^{-a(-h)} - C(a) e^{a(-h)} - \frac{ie^{-a|-h-z'|}}{4\pi\sigma_2} \right) da = \dots \\ -\sigma_3 \int_0^{\infty} a J_0(a\rho) D(a) e^{a(-h)} da \end{aligned} \quad (3-16)$$

De la ecuación anterior se obtiene otra relación:

$$\sigma_2 \left(B(a) e^{ah} - C(a) e^{-ah} - \frac{ie^{-a|-h-z'|}}{4\pi\sigma_2} \right) = -\sigma_3 D(a) e^{-ah} \quad (3-17)$$

Y al aplicar la última condición de frontera dada por (3-11) usando las ecuaciones (3-6), (3-7) y (2-7), evaluada en $z = -h$:

$$\int_0^{\infty} a J_1(a\rho) \left(B(a) e^{-a(-h)} + C(a) e^{a(-h)} + \frac{ie^{-a|-h-z'|}}{4\pi\sigma_2} \right) da = \int_0^{\infty} a J_1(a\rho) D(a) e^{-a(h)} da \quad (3-18)$$

De la ecuación anterior se extrae la siguiente igualdad:

$$B(a) e^{ah} + C(a) e^{-ah} + \frac{ie^{-a|-h-z'|}}{4\pi\sigma_2} = D(a) e^{-ah} \quad (3-19)$$

Del sistema formado por las cuatro ecuaciones dadas por (3-13), (3-15), (3-17) y (3-19) se obtienen las funciones $A(a)$, $B(a)$, $C(a)$ y $D(a)$:

$$A(a) = \left[\frac{e^{az'}}{4\pi\sigma_2} + \frac{\Gamma_{32} e^{-2ah} (e^{-az'} + \Gamma_{12} e^{az'})}{4\pi\sigma_2 (1 - \Gamma_{12} \Gamma_{32} e^{-2ah})} \right] [1 + \Gamma_{12}] i \quad (3-20)$$

$$B(a) = \frac{\Gamma_{32} e^{-2ah} (e^{-az'} + \Gamma_{12} e^{az'})}{4\pi\sigma_2 (1 - \Gamma_{12} \Gamma_{32} e^{-2ah})} i \quad (3-21)$$

$$C(a) = \left(\frac{\Gamma_{12} e^{az'}}{4\pi\sigma_2} + \frac{\Gamma_{12} \Gamma_{32} e^{-2ah} (\Gamma_{12} e^{az'} + e^{-az'})}{4\pi\sigma_2 (1 - \Gamma_{12} \Gamma_{32} e^{-2ah})} \right) i \quad (3-22)$$

$$D(a) = \left[\frac{1}{4\pi\sigma_2} + \frac{\Gamma_{32} (1 + \Gamma_{12} e^{-2ah})}{4\pi\sigma_2 (1 - \Gamma_{12} \Gamma_{32} e^{-2ah})} \right] [e^{-az'} + \Gamma_{12} e^{az'}] i \quad (3-23)$$

donde:

$$\Gamma_{32} = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_3 + \sigma_2} \right) \quad (3-24)$$

$$\Gamma_{12} = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right) \quad (3-25)$$

Al substituir las ecuaciones (3-20), (3-21), (3-22) y (3-23) en (3-1), (3-3) y (3-4), se obtienen los potenciales escalares, para cualquier estrato, debido a la inyección de corriente en un punto que se encuentra en el segundo estrato; sin embargo, el problema que se presenta al hacer tal substitución es que para calcular el potencial se tiene que resolver una integral infinita que puede ser difícil de resolver; para solventar esta dificultad, las funciones $A(a)$, $B(a)$, $C(a)$ y $D(a)$ son convertidas en series infinitas usando la siguiente identidad:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \dots \quad (3-26)$$

Si el medio 1 se considera que es el aire, entonces el coeficiente de reflexión dado por (3-25) tiene el valor de la unidad:

$$\Gamma_{12} = 1 \quad (3-27)$$

Al usar (3-26) y (3-27) en la función $A(a)$ dada por (3-20), se obtiene lo siguiente:

$$A(a) = \frac{i}{2\pi\sigma_2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\Gamma_{32}^k e^{-a(2k h - z')} + \Gamma_{32}^{(k+1)} e^{-a(2(k+1) h + z')} \right) \right) \quad (3-28)$$

Y al substituir (3-28) en (3-1) y teniendo en cuenta (2-35) se obtiene el potencial para la primera capa o estrato:

$$V_1(\rho, z) = \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{\rho^2 + (z+2jh-z')^2}} + \frac{\Gamma_{32}^{(j+1)}}{\sqrt{\rho^2 + (z+2(j+1)h+z')^2}} \right) \right] \frac{i}{\sigma_2} \quad (3-29)$$

Al usar (3-26) y (3-27) en las funciones $B(a)$ y $C(a)$ dadas por (3-21) y (3-22) respectivamente se obtienen:

$$B(a) = \frac{i}{4\pi\sigma_2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} (\Gamma_{32}^j e^{-a(2jh-z')} + \Gamma_{32}^j e^{-a(2jh+z')}) \right) \quad (3-30)$$

$$C(a) = \frac{i}{4\pi\sigma_2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (\Gamma_{32}^j e^{a(-2jh+z')}) + \sum_{j=1}^{\infty} (\Gamma_{32}^j e^{a(-2jh-z')}) \right) \quad (3-31)$$

Al substituir (3-30) y (3-31) en (3-2) y haciendo uso de (2-35) se obtiene el potencial para la segunda capa o estrato:

$$V_2(\rho, z) = \left[\frac{1}{4\pi} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{\rho^2 + (z+2jh-z')^2}} + \frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{\rho^2 + (z-2jh+z')^2}} \right) + \dots \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{\rho^2 + (z-2jh-z')^2}} + \frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{\rho^2 + (z+2jh+z')^2}} \right) \right] \frac{i}{\sigma_2} \quad (3-32)$$

Por último, al usar (3-26) y (3-27) en (3-23) se obtiene la función $D(a)$ como una serie:

$$D(a) = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left((\Gamma_{32}^j + \Gamma_{32}^{j+1}) (e^{a(-2jh+z')} + e^{a(-2jh-z')}) \right) \right] \quad (3-33)$$

Al substituir la ecuación anterior en (3-3) teniendo en cuenta (2-35), se obtiene el potencial para el tercer estrato o capa:

$$V_3(\rho, z) = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j + \Gamma_{32}^{j+1}}{\sqrt{\rho^2 + (z-2jh+z')^2}} + \frac{\Gamma_{32}^j + \Gamma_{32}^{j+1}}{\sqrt{\rho^2 + (z-2jh-z')^2}} \right) \right] \frac{i}{\sigma_2} \quad (3-34)$$

Al usar (2-26) en las ecuaciones (3-29), (3-32) y (3-34), se obtiene lo siguiente:

$$V_1(x, y, z, x', y', z') = \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+2jh-z')^2}} + \dots \right) + \frac{\Gamma_{32}^{(j+1)}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+2(j+1)h+z')^2}} \right] \frac{i}{\sigma_2} \quad (3-35)$$

$$V_2(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+2jh-z')^2}} + \dots \right) + \dots \right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-2jh-z')^2}} + \dots \right) + \dots \right) \right] \frac{i}{\sigma_2} \quad (3-36)$$

$$V_3(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j + \Gamma_{32}^{j+1}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-2jh+z')^2}} + \dots \right) \frac{i}{\sigma_2} \quad (3-37)$$

Si se comparan las ecuaciones (3-35), (3-36) y (3-37) con las ecuaciones (1-2) y (1-5), nótese que los términos que se encuentran dentro de los paréntesis y que acompañan a la corriente \hat{i} , son las funciones de Green que permiten calcular los potenciales en cualquier estrato, si se inyecta una corriente puntual \hat{i} por el segundo estrato. Si la corriente puntual \hat{i} se inyecta por el tercer estrato, entonces hay que deducir otras funciones de Green. A continuación se presentan las ecuaciones de Green extraídas de las ecuaciones (3-35), (3-36) y (3-37):

$$fGreen_{12}^{3\ est}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+2jh-z')^2}} + \dots \right) + \frac{\Gamma_{32}^{(j+1)}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+2(j+1)h+z')^2}} \quad (3-38)$$

$$fGreen_{22}^{3\ est}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+2jh-z')^2}} + \dots \right) + \dots \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-2jh-z')^2}} + \dots \right) + \dots \quad (3-39)$$

$$fGreen_{32}^{3est}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^j + \Gamma_{32}^{j+1}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-2jh+z')^2}} + \dots \right) + \left(\frac{\Gamma_{32}^j + \Gamma_{32}^{j+1}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-2jh-z')^2}} \right) \quad (3-40)$$

La función de Green dada por (3-38) permite calcular el potencial en cualquier punto del aire (primer estrato), la función dada por **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** permite calcular el potencial en la capa más superficial del suelo (segundo estrato) y la ecuación dada por (3-40) permite calcular el potencial en la capa más profunda del suelo (tercer estrato), para las tres funciones de Green se considera que la inyección de corriente está ocurriendo en la capa más superficial del suelo, que corresponde al segundo estrato.

Las funciones de Green dadas con anterioridad permiten calcular el potencial en cualquier punto del medio, si se tiene un electrodo cilíndrico en el segundo estrato y que se encuentre drenando una corriente a la tierra:

Para el primer estrato o el aire:

$$V_1(x, y, z) = \frac{1}{\sigma_2} \int fGreen_{12}^{3est}(x, y, z, x', y', z') i(x', y', z') d\ell \quad (3-41)$$

Para el segundo estrato:

$$V_2(x, y, z) = \frac{1}{\sigma_2} \int fGreen_{22}^{3es}(x, y, z, x', y', z') i(x', y', z') d\ell \quad (3-42)$$

Para el tercer estrato:

$$V_3(x, y, z) = \frac{1}{\sigma_2} \int fGreen_{32}^{3est}(x, y, z, x', y', z') i(x', y', z') d\ell \quad (3-43)$$

donde la integral es de línea y que se realiza a lo largo o en la dirección axial del electrodo y:

$i(x', y', z')$ Es la densidad de corriente que el electrodo drena a tierra (A/m).

$d\ell$ Es un diferencial de longitud (m).

En el documento *Sistemas de puesta a tierra. Parte 4.* se presentan numerosos ejemplos de cómo calcular la resistencia en electrodos cilíndricos y como se puede obtener las curvas equipotenciales en la superficie del suelo, usando las funciones de Green (3-38), **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y (3-40), funciones que son adecuadas cuando se modela el suelo como un medio formado por dos capas y el electrodo que inyecta corriente se encuentra en la capa más superficial del suelo.

4. Función de Green para calcular el potencial en un medio infinito formado por tres estratos, teniendo como fuente una corriente en un punto situado en el tercer estrato.

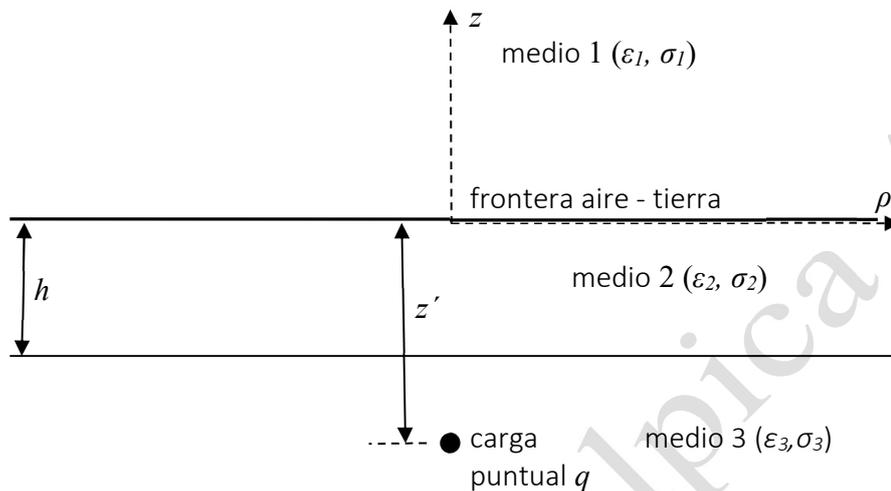


Figura 4. Medio infinito formado por tres estratos y una carga puntual ubicada en el tercer estrato

La figura 4 muestra un medio infinito formado por tres capas o estratos, en el estrato 3 se encuentra una carga puntual q , que tiene asociada una corriente que se inyecta en el medio 3 según (2-31) y dada por la siguiente relación:

$$q = \frac{\epsilon_3}{\sigma_3} i \quad (4-1)$$

Siguiendo el mismo procedimiento ya descrito para medios infinitos formados por tres estratos que se explica en la sección 3, la solución para el potencial y para cada una de las capas es la siguiente:

Para la primera capa:

$$V_1(\rho, z) = \int_0^\infty B'_1(a) J_0(a\rho) e^{-az} da \quad (4-2)$$

Para la segunda capa:

$$V_2(\rho, z) = \int_0^\infty (A'_2(a) J_0(a\rho) e^{az} + B'_2(a) J_0(a\rho) e^{-az}) da \quad (4-3)$$

Y para la tercera capa donde se encuentra la corriente puntual i :

$$V_3(\rho, z) = \int_0^\infty A'_3(a) J_0(a\rho) e^{az} da + \frac{i(x', y', z')}{4\pi \sigma_3 \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}} \quad (4-4)$$

Al usar (2-35) en (4-4), el potencial en la tercera capa queda de esta forma:

$$V_3(\rho, z) = \int_0^\infty J_0(a\rho) \left[A'_3(a) e^{az} + \frac{i}{4\pi\sigma_3} e^{-a|z-z'|} \right] da \quad (4-5)$$

Las funciones $B'_1(a)$, $B'_2(a)$, $A'_2(a)$ y $A'_3(a)$ se obtienen al aplicar las condiciones de fronteras dadas por (3-8), (3-9), (3-10) y (3-11).

Pero antes de aplicar las condiciones de frontera, es necesario calcular el gradiente del potencial de las ecuaciones (4-2), (4-3) y (4-4) usando (2-42):

$$\nabla V_1 = - \int_0^\infty a B'_1 J_1(a\rho) e^{-az} da \bar{\mathbf{a}}_\rho - \int_0^\infty a B'_1 J_0(a\rho) e^{-az} da \bar{\mathbf{a}}_z \quad (4-6)$$

$$\begin{aligned} \nabla V_2 = & - \int_0^\infty a J_1(a\rho) (A'_2 e^{az} + B'_2 e^{-a}) da \mathbf{a}_\rho + \dots \\ & + \int_0^\infty a J_0(a\rho) (A'_2 e^{az} - B'_2 e^{-az}) da \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (4-7)$$

$$\begin{aligned} \nabla V_3 = & - \int_0^\infty a J_1(a\rho) \left(A'_3 e^{az} + \frac{i}{4\pi\sigma_3} e^{-a|z-z'|} \right) da \mathbf{a}_\rho + \dots \\ & \dots + \int_0^\infty a J_0(a\rho) \left(A'_3 e^{az} - \frac{i \operatorname{sign}(z-z') e^{-a|z-z'|}}{4\pi\sigma_3} \right) da \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (4-8)$$

Al aplicar la condición de frontera dada por (3-9)(4-6) usando (4-6) (4-7) evaluada en $z = 0$, se obtiene una primera relación:

$$B'_1(a) = B'_2(a) + A'_2(a) \quad (4-9)$$

Al aplicar la condición de frontera dada por (3-11) usando (4-7) y (4-8), evaluada en $z = -h$ se obtiene otra relación:

$$A'_2(a) e^{-ah} + B'_2(a) e^{ah} = \left[A'_3(a) e^{-ah} + \frac{i e^{-a(-h-z')}}{4\pi\sigma_3} \right] \quad (4-10)$$

Al aplicar la condición de frontera (3-8) usando(4-6) (4-7), evaluada en $z = 0$, se obtiene una tercera relación, a sabiendas que $\sigma_1 = 0$ porque la primera capa o estrato es el aire:

$$A'_2(a) = B'_2(a) \quad (4-11)$$

Por último, al aplicar la condición de frontera (3-10) usando (4-7) y (4-8), en $z = -h$ se obtiene una última relación:

$$\sigma_2(A'_2(a) e^{-ah} - B'_2(a) e^{ah}) = \sigma_3 \left(A'_3(a) e^{-ah} - \frac{i e^{-a(-h-z')}}{4\pi\sigma_3} \right) \quad (4-12)$$

Con (4-9), (4-10), (4-11) y (4-12) se obtiene un sistema de ecuaciones de donde se obtienen las funciones B'_1, B'_2, A'_2 y A'_3 :

$$A'_2 = \frac{2 e^{az'}}{4\pi(\sigma_2+\sigma_3) (\Gamma_{23} e^{-2ah+1})} i \quad (4-13)$$

$$A'_3 = \frac{e^{az'} + \Gamma_{23} e^{a(2h+z')}}{4\pi \sigma_3 (\Gamma_{23} e^{-2ah+1})} i \quad (4-14)$$

$$B'_1 = \frac{4e^{az'}}{4\pi (\sigma_2+\sigma_3) (\Gamma_{23} e^{-2ah+1})} i \quad (4-15)$$

$$B'_2 = \frac{2e^{az'}}{4\pi(\sigma_2+\sigma_3) (\Gamma_{23} e^{-2ah+1})} i \quad (4-16)$$

donde:

$$\Gamma_{23} = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_3 + \sigma_2} \quad (4-17)$$

El coeficiente de reflexión Γ_{23} dado por la ecuación anterior es diferente al coeficiente de reflexión Γ_{32} definido por la ecuación (3-24):

$$\Gamma_{23} = -\Gamma_{32} \quad (4-18)$$

Las funciones $B'_1(a), B'_2(a), A'_2(a)$ y $A'_3(a)$, dadas por (4-13), (4-14), (4-15) y (4-16) respectivamente, se substituyen en las ecuaciones (4-2), (4-3) y (4-5) para obtener los potenciales en cada estrato:

Potencial en el primer estrato:

$$V_1(\rho, z) = \left(\frac{4}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-a(z-z')} J_0(a\rho)}{(1+\Gamma_{23} e^{-2ah})} da \right) \frac{i}{(\sigma_2+\sigma_3)} \quad (4-19)$$

Al hacer uso de la serie dada por (3-26) y al aplicar la relación dada por (2-35), el potencial en el primer estrato viene dado por la siguiente expresión:

$$V_1(\rho, z) = \left(\sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{\pi \sqrt{\rho^2 + (2jh+z-z')^2}} \right) \frac{i}{(\sigma_2+\sigma_3)} \quad (4-20)$$

Para el segundo estrato:

$$V_2(\rho, z) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{az'} J_0(a\rho) (e^{az} + e^{-a})}{(1+\Gamma_{23} e^{-2ah})} da \right) \frac{i}{(\sigma_2+\sigma_3)} \quad (4-21)$$

Al emplear (2-35) y (3-26) en la ecuación anterior:

$$V_2(\rho, z) = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+z'-2jh)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z'+2jh)^2}} \right) \right] \frac{i}{(\sigma_2 + \sigma_3)} \quad (4-22)$$

Para el tercer estrato:

$$V_3(\rho, z) = \left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{J_0(a\rho)(e^{az'} + \Gamma_{23} e^{a(2h+z')}) e^{az}}{1 + \Gamma_{23} e^{-2ah}} da + \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} \right) \frac{i}{\sigma_3} \quad (4-23)$$

Al usar (2-35) y (3-26) en la ecuación anterior:

$$V_3(\rho, z) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-z')^2}} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{\sqrt{\rho^2 + (z+z'-2jh)^2}} + \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{\sqrt{\rho^2 + (z+z'+(1-j)2h)^2}} \right) \right] \frac{i}{\sigma_3} \quad (4-24)$$

Al usar(2-27) en las ecuaciones (4-20), (4-22) y (4-24):

$$V_1(x, y, z, x', y', z') = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2jh+z-z')^2}} \right) \frac{i}{(\sigma_2 + \sigma_3)} \quad (4-25)$$

$$V_2(x, y, z, x', y', z') = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'-2jh)^2}} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'+2jh)^2}} \right) \right] \frac{i}{(\sigma_2 + \sigma_3)} \quad (4-26)$$

$$V_3(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'-2jh)^2}} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^{j+1}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'+(1-j)2h)^2}} \right) \right] \frac{i}{\sigma_3} \quad (4-27)$$

De las ecuaciones (4-25), (4-26) y (4-27), se extraen las funciones de Green, para el caso de un medio formado por tres estratos y la inyección de corriente se efectúa por el tercer estrato:

$$fGreen_{13}^{3est}(x, y, z, x', y', z') = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{\pi \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (2jh+z-z')^2}} \right) \quad (4-28)$$

$$fGreen_{23}^{3est}(x, y, z, x', y', z') = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'-2jh)^2}} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'+2jh)^2}} \right) \right] \quad (4-29)$$

$$fGreen_{33}^{3es}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \dots \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^j \Gamma_{23}^j}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'-2jh)^2}} + \dots \right) \right. \\ \left. + \frac{(-1)^j \Gamma_{23}^{j+1}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'+(1-j)2h)^2}} \right] \quad (4-30)$$

Las funciones de Green dadas con anterioridad permiten calcular el potencial en cualquier punto del medio, si se tiene un electrodo cilíndrico en el tercer estrato y que se encuentre drenando una corriente a la tierra:

Para el primer estrato o el aire:

$$V_1(x, y, z) = \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_3)} \int fGreen_{13}^{3est}(x, y, z, x', y', z') i(x', y', z') d\ell \quad (4-31)$$

Para el segundo estrato:

$$V_2(x, y, z) = \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_3)} \int fGreen_{23}^{3est}(x, y, z, x', y', z') i(x', y', z') d\ell \quad (4-32)$$

Para el tercer estrato:

$$V_3(x, y, z) = \frac{1}{\sigma_3} \int fGreen_{33}^{3est}(x, y, z, x', y', z') i(x', y', z') d\ell \quad (4-33)$$

donde la integrales son todas de línea y que se realiza a lo largo o en la dirección axial del electrodo y:

$i(x', y', z)$ Es la densidad de corriente que el electrodo drena a tierra (A/m).

$d\ell$ Es un diferencial de longitud (m).

En el documento *Sistemas de puesta a tierra. Parte 4.* se presentan numerosos ejemplos de cómo calcular la resistencia en electrodos cilíndricos y como se puede obtener las curvas equipotenciales en la superficie del suelo, usando las funciones de Green (4-28), (4-29) y (4-30), funciones que son adecuadas cuando se modela el suelo como un medio formado por dos capas y el electrodo que inyecta corriente se encuentra en la capa más profunda del suelo.

Referencias

- [Jackson, 1975]** Jackson, Jonh David, "*Classical Electrodinamics*", John Wiley & Son, Inc.; New York, 1975, ISBN 0-471-43132-X.
- [Johnk, 1996]** Johnk, Carl T.; "*Teoría Electromagnética. Campos y Ondas*", Limusa Noriega Editores México, 1996.
- [Spiegel, 1988]** Spiegel, Murray; Abellanas, Lorenzo, "*Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*", Serie Compendios Schaum, McGraw-Hill, Madrid, 1988.
- [Stinson, 1976]** Stinson, Donald C., "*Intermdiate Mathematics of Electromagnetics*", Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs N. J., 1976.
- [Sommerfeld, 1949]** Sommerfeld, Arnold, "*Partial Differential Equation in Physics*", Academic Press Inc., New York, 1949.
- [Dawalibi, 1975]** Dawalibi F., Mukhedkar D. Optimun Design of Substation Grounding in a two layer Earth Structure. Part I – Analytical Study, IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-94, no. 2, March/April 1975.
- [Malpica, 2022-1]** Malpica Wilmer Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 3. Apuntes del curso. Universidad Central de Venezuela, marzo 2022.
- [Malpica, 2022-2]** Malpica Wilmer Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 4. Apuntes del curso. Universidad Central de Venezuela, abril 2022.