

SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

PARTE 4

Napoleón Malpica Albert

Abril 2022

Contenido

PARTE 4.....	1
1. Introducción.....	4
2. Funciones de Green para calcular el potencia escalar eléctrico para un medio formado por tres estratos.....	6
2.1. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el primer estrato (aire) debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el segundo estrato.	7
2.2. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el segundo estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el mismo estrato.	9
2.3. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el tercer estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el segundo estrato.	10
2.4. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el primer estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el tercer estrato.	11
2.5. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el segundo estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el tercer estrato.	12
2.6. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el tercer estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el mismo estrato.	13
3. Calculo de la resistencia propia de una barra y la resistencia mutua entre barras, para suelos formados por dos capas.	14
3.1. Resistencia propia de una barra ubicada en la primera capa del suelo.	14
3.2. Resistencia propia de una barra ubicada en la segunda capa del suelo.	15
3.3. Resistencia propia de una barra ubicada entre la primera y segunda capa del suelo.	16
3.4. Resistencia mutua entre barras que se encuentran instaladas en la capa superior del suelo.....	18
3.5. Resistencia mutua entre barras donde ambas se encuentran instaladas en la capa inferior del suelo.	20
3.6. Resistencia mutua entre barras donde ambas se encuentran instaladas entre las capas del suelo.....	21
4. Calculo de la resistencia propia y mutuas entre contrapesos, para suelo formados por dos capas.	23
4.1. Resistencia propia de un contrapeso que se encuentra en la primera capa del suelo.	23
4.2. Resistencia propia de un contrapeso que se encuentra en la segunda capa del suelo.	25

4.3.	Resistencia mutua entre contrapesos que se encuentran en la primera capa del suelo.	25
4.4.	Resistencia mutua entre contrapesos que se encuentran en la segunda capa del suelo.....	27
5.	Calculo de la resistencia mutuas entre un contrapeso y una barra para suelo formados por dos capas.	28
5.1.	Resistencia mutua si ambos electrodos se encuentran en la primera capa del suelo.	28
5.2.	Resistencia mutua si ambos electrodos se encuentran en la segunda capa del suelo.	29
	Referencias.....	30
A	Anexo A.....	31
	Cálculo de un sistema de puesta a tierra formado por una barra y un contrapeso	31
B	Anexo B.....	41
	Malla de puesta a tierra constituida por cuatro contrapesos y que forman un rectángulo... ..	41
	Malla compuesta por cuatro electrodos o contrapesos enterrados en la primera capa del suelo, formando un rectángulo.	42

Napoleón Malpica A.

SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

TIERRA

CUARTA PARTE

1. Introducción.

Esta cuarta parte de los apuntes sobre puesta a tierra, está enfocado tanto al cálculo de la resistencia de puesta a tierra de un electrodo o de un conjunto de electrodos, que conforman un sistema de puesta a tierra, así como la obtención de las curvas equipotenciales del suelo, considerando que el suelo no es un medio homogéneo sino un medio formado por dos capas con diferentes resistividades.

Haciendo un recuento de los contenidos en estos apuntes, la primera parte del curso (Sistemas de puesta a tierra. Parte 1), trata brevemente sobre los fundamentos de un sistema de puesta a tierra, teniendo como punto de partida las ecuaciones de Maxwell en régimen estacionario y como electrodo se emplea una semiesfera, enterrada al ras de suelo, que defino como el **electrodo académico** por la gran facilidad en realizar cálculos y la de explicar con simplicidad los conceptos básicos relacionados con la puesta a tierra.

En la segunda parte de los apuntes (Sistemas de puesta a tierra. Parte 2), ya no se utiliza el electrodo académico y en su lugar se trabaja con electrodos cilíndricos como barras y contrapesos, que son los electrodos que comúnmente se utilizan en los sistemas de puesta a tierra. En el documento se presentan una gran cantidad de fórmulas para calcular la resistencia de puesta a tierra, sin deducir como se obtuvieron las mismas. Muchas de las fórmulas fueron tomadas de recomendaciones como la IEEE Std 80, concebida para el diseño de mallas de puesta a tierra en subestaciones eléctricas, y la recomendación IEEE Std 142 conocido como el libro verde, que es aplicable para el diseño de mallas de puesta a tierra para infraestructuras de uso comercial e industrial y también se hace una discusión sobre el artículo 250 del Código Eléctrico Nacional, que es el artículo dedicado al diseño de mallas de puesta a tierra para infraestructuras que son alimentadas en baja tensión (menos de 1000V). Otro aspecto que se contempla en la segunda parte de los apuntes es el tratamiento del suelo, para el caso que el mismo tenga una alta resistividad y no se logre el valor de resistencia requerido.

Con los contenidos dados en las dos primeras partes de curso y con la información brindada por las recomendaciones y normas que sean aplicable a los sistemas de puestas a tierra, se espera que el lector cuente con la suficiente información y adquiera la destreza para comenzar hacer diseños de redes de puestas a tierra en infraestructuras como viviendas, industrias, comercios, subestaciones eléctricas, etc..

En la tercera parte del curso, se expone cómo obtener la resistencia de puesta a tierra, en electrodos cilíndricos, mediante la solución de la ecuación de Laplace para el potencial escalar eléctrico, usando un método de integración y el empleo de funciones de Green. En cuanto al suelo, se considera que es un medio homogéneo. La solución de la ecuación de Laplace por el método de integración, si las integrales tienen primitivas, entonces es posible obtener una

solución analítica, de esta forma se obtienen fórmulas para calcular resistencia, pero el principal objetivo es resolver las integrales de manera numérica, con la finalidad que el lector pueda generar sus propias herramientas de cálculo, empleando algún software matemático o algún lenguaje de programación.

Ahora bien, en esta cuarta parte se pretende continuar con la misma metodología descrita en la parte tres, pero considerando que el suelo ya no es un medio homogéneo sino un medio que está formado por dos capas. Muchos de los programas comerciales destinados para el cálculo de sistemas de puesta a tierra, están formulados para trabajar con suelos formados por dos capas. En esta guía se presenta la metodología para calcular la resistencia de electrodos cilíndricos que se encuentran enterrados en suelos formados por dos capas. Se asume que el lector que aborde estos apuntes, conoce previamente de la metodología de cálculo que se describe en el documento *Sistemas de puesta a tierra. Parte 3*.

Napoleón Malpica A.

2. Funciones de Green para calcular el potencia escalar eléctrico para un medio formado por tres estratos.

La figura 1 muestra el caso de un medio de dimensiones infinitas formado por tres estratos, un primer estrato lo conforma el aire y cuya conductividad se asume nula $\sigma_1 = 0$, un segundo estrato lo conforma la capa del suelo que se encuentra más superficial, que tiene una conductividad σ_2 y un espesor g y el tercer estrato lo conforma la capa del suelo que se encuentra más profunda y que tiene una conductividad σ_3 .

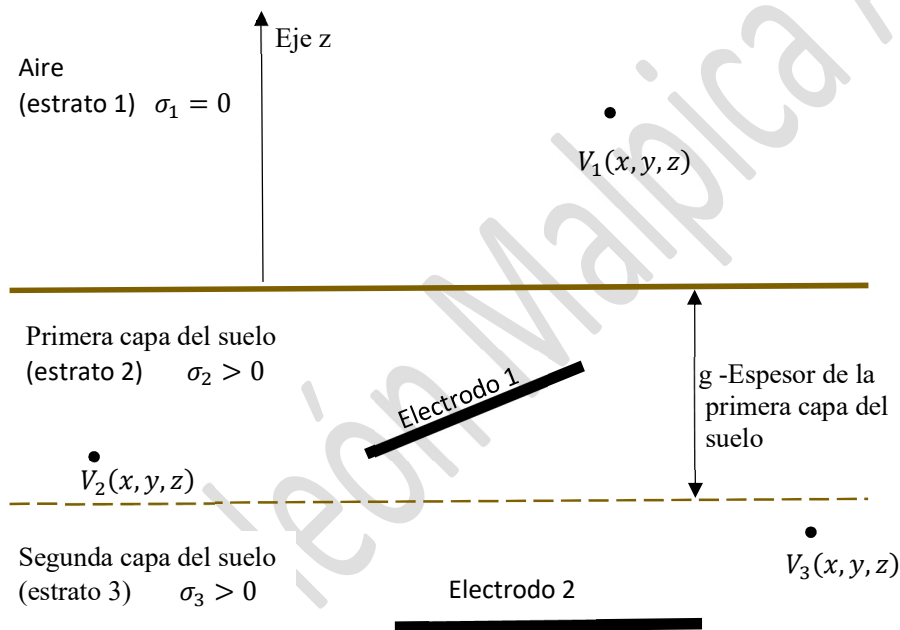


Fig. 1 Figura en elevación donde se muestra un medio infinito compuesto por tres estratos.

Adicionalmente, en la Figura 1 se muestra un eje de coordenadas z , todos los puntos que pertenecen a la superficie del suelo tienen coordenadas $z = 0$, también se muestran dos electrodos, uno enterrado en la primera capa del suelo (segundo estrato) y otro enterrado en la segunda capa del suelo o en el tercer estrato

Si un electrodo se encuentra inyectando corriente al suelo, entonces el mismo generará un potencial en cualquier punto del espacio y que puede estar ubicado en cualquiera de los tres estratos. De acuerdo con la Figura 1, V_1 es el potencial que adquiere un punto que se encuentra en el primer estrato (aire), V_2 es el potencial de un punto que se encuentra en el segundo estrato o la capa más superficial de la tierra y V_3 es el potencial de un punto que se encuentra en el tercer estrato o la segunda capa del suelo.

Para calcular el potencial en cualquier punto del espacio, que produce la inyección de corriente a través de un electrodo o de un conjunto de electrodos, es necesario conocer las funciones de Green para un medio infinito formado por tres estratos, en total son seis funciones de Green que se necesitan para calcular el potencial, a continuación se presentan dichas funciones.

2.1. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el primer estrato (aire) debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el segundo estrato.

El potencial V_1 que tiene un punto ubicado en el primer estrato (aire), debido a un electrodo que se encuentra inyectado corriente en el suelo, ubicado en el segundo estrato, vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$V_1(x, y, z) = \frac{i}{\sigma_2 l} \int_b^a fGreen_{12}(x, y, z, x', y', z') dl' \quad (2-1)$$

donde :

$$fGreen_{12}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'+2kg)^2}} \right) + \dots \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^{k+1}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'+2(k+1)g)^2}} \right) \quad (2-2)$$

$$\Gamma_{32} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2 + \rho_3} \quad (2-3)$$

- Γ_{32} - Es el coeficiente de reflexión
- x, y, z - Son las coordenadas del punto donde se quiere calcular el potencial.
- x', y', z' - Son las coordenadas para ubicar el electrodo que inyecta corriente.
- l - Es la longitud del electrodo.
- g - Es el espesor de la primera capa del suelo.
- dl' - Es un diferencial de longitud.
- ρ_j - Es la resistividad de la capa j del suelo y es igual al inverso de la conductividad σ_j .
- $fGreen_{12}$ - Es la función de Green que permite calcular el potencial de un punto ubicado en el primer estrato debido a la inyección de corriente en el suelo a través de un electrodo ubicado en el segundo estrato.

• Ejercicio 1

Se tiene un contrapeso de 6 metros de longitud, enterrado en el suelo a una profundidad de 0.5 (m), y que se encuentra paralelo al eje x , la Figura 2 muestra un plano de planta del electrodos con sus coordenadas. Si a través del electrodo se inyecta una corriente en la tierra de 200 (A), grafique las líneas equipotenciales en la superficie del suelo.

Asuma que el suelo se encuentra formado por dos capas, la capa más superficial tiene una resistividad de 40 (Ωm) con un espesor de 2 (m) y la capa más profunda tiene una resistividad de 150 (Ωm)

Para calcular las líneas equipotenciales sobre la superficie del suelo, se puede utilizar la ecuación (2-1) y evaluarla para $z = 0$, ya que todavía la superficie del suelo se encuentra en el límite del primer estrato.

Datos:

$i = 200 \text{ (A)}$	-Corriente inyectada a través del electrodo.
$\rho_2 = 40 \text{ (\Omega m)}$	-Resistividad de la primera capa del suelo.
$\rho_3 = 150 \text{ (\Omega m)}$	-Resistividad de la segunda capa del suelo.
$g = 2 \text{ (m)}$	-Espesor de la primera capa del suelo.
$z' = -0.5 \text{ (m)}$	-Coordenada z' del electrodo.
$y' = 2 \text{ (m)}$	-Coordenada y' del electrodo.
$a = 7 \text{ (m)}$	-Límite de integración de la variable x' .
$b = 1 \text{ (m)}$	-Límite de integración de la variable x' .
$\Gamma_{32} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2 + \rho_3} = 0.579$	-Coeficiente de reflexión.
$l = 6 \text{ (m)}$	-Longitud del contrapeso.

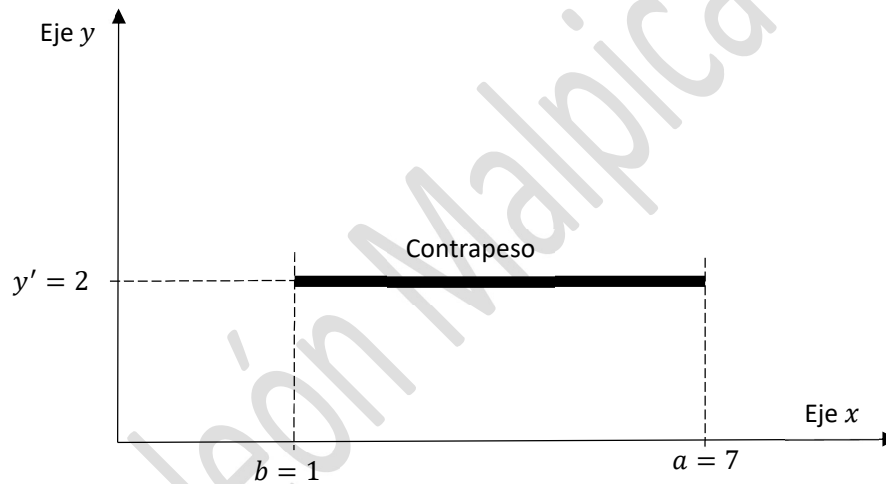


Fig. 2 Plano de planta del contrapeso, indicando sus coordenadas.

Al usar (2-1) se obtiene la expresión para calcular el potencial en cuestión:

$$V_{suelo}(x, y) = V_1(x, y, 0) = \frac{i}{\sigma_2 l} \int_b^a fGreen_{12}(x, y, 0, x', y', z') dx' \quad (2-4)$$

donde $dl' = dx'$

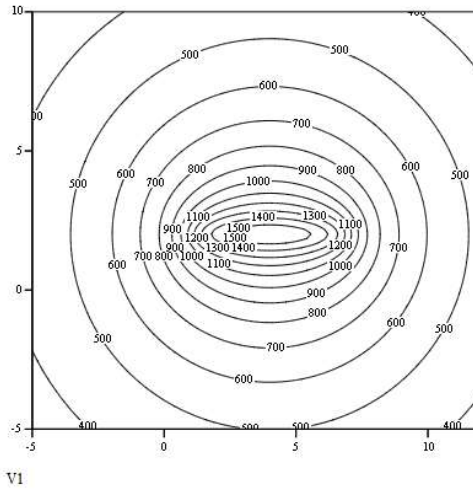


Fig. 3 Líneas equipotenciales en la superficie del suelo.

La Figura 3 muestra las líneas equipotenciales sobre la superficie del suelo, obtenidas con un programa para cálculo matemático MathCad

2.2. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el segundo estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el mismo estrato.

El potencial que adquiere un punto que se encuentra en el estrato 2 debido a la inyección de corriente en la tierra a través de un electrodo ubicado en el mismo estrato, viene dado por la siguiente ecuación:

$$V_2(x, y, z) = \frac{i}{\sigma_2 l} \int_b^a fGreen_{2,2}(x, y, z, x', y', z') dl' \quad (2-5)$$

donde $fGreen_{2,2}$ viene dado por:

$$fGreen_{2,2}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left[\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z' + 2kg)^2}} \right) + \dots \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z' - 2kg)^2}} \right) + \dots \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z' + 2kg)^2}} \right) + \dots \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z' - 2kg)^2}} \right) \end{aligned} \right] \quad (2-6)$$

• Ejercicio 2:

Calcular nuevamente las curvas equipotenciales, para el contrapeso mostrado en la Figura 2, empleando los mismos datos del Ejercicio 1, pero utilizando para el cálculo la función de Green (2-6) y (2-5) para el potencial.

En este caso en particular, como los puntos que se encuentran sobre la superficie del suelo, se puede considerar que forman parte tanto del primer estrato como del segundo

estrato, es por esta razón que las curvas equipotenciales pueden ser calculadas usando tanto la función de Green (2-6) como la (2-2).

El potencial en la superficie del suelo vendrá dado por (2-5) y (2-6), donde la coordenada z debe tomar el valor de cero ya que todos los puntos que se encuentran sobre la superficie del suelo tienen coordenada $z = 0$:

$$V_{suelo}(x, y) = V_2(x, y, 0) = \frac{i}{\sigma_2 l} \int_b^a fGreen_{22}(x, y, 0, x', y', z') dx' \quad (2-7)$$

donde:

$\rho_2 = 40(\Omega m)$	-Resistividad de la primera capa del suelo.
$\rho_3 = 150(\Omega m)$	-Resistividad de la segunda capa del suelo.
$g = 2(m)$	-Espesor de la primera capa del suelo.
$z' = -0.5(m)$	-Coordenada z' del electrodo.
$y' = 2(m)$	-Coordenada y' del electrodo.
$a = 7(m)$	-Límite de integración de la variable x' .
$b = 1(m)$	-Límite de integración de la variable x' .
$\Gamma_{32} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_2 + \rho_3} = 0.579$	-Coeficiente de reflexión.
$l = 6(m)$	-Longitud del contrapeso.
$fGreen_{22}$	-es la función de Green dada por (2-6).

La Figura 4 muestra las curvas equipotenciales obtenidas al emplear la función de Green (2-6), donde se muestran resultados iguales a los obtenidos en el Problema 1

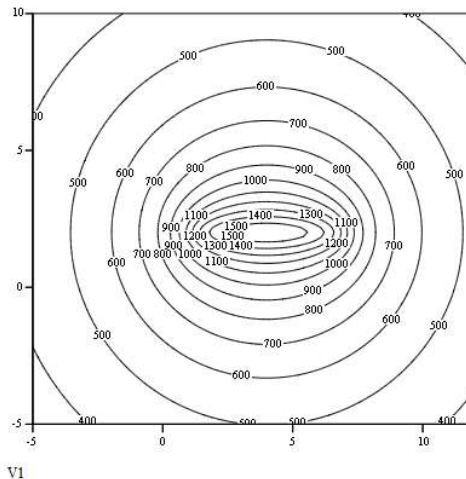


Fig. 4 Líneas equipotenciales sobre la superficie del suelo.

2.3. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el tercer estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el segundo estrato.

El potencial que adquiere un punto que se encuentra en el tercer estrato debido a la inyección de corriente en la tierra a través de un electrodo ubicado en el estrato 2, viene dado por la siguiente ecuación:

$$V_3(x, y, z) = \frac{i}{\sigma_2 l} \int_b^a fGreen_{32}(x, y, z, x', y', z') dl' \quad (2-8)$$

donde $fGreen_{32}$ viene dado por:

$$fGreen_{32}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^k + \Gamma_{32}^{k+1}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'-2kg)^2}} \right) + \dots \right] + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{32}^k + \Gamma_{32}^{k+1}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'-2kg)^2}} \right) \quad (2-9)$$

2.4. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el primer estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el tercer estrato.

El potencial que adquiere un punto que se encuentra en el primer estrato debido a la inyección de corriente en la tierra a través de un electrodo ubicado en el estrato 3, viene dado por la siguiente ecuación:

$$V_1(x, y, z) = \frac{i}{(\sigma_2 + \sigma_3)l} \int_b^a fGreen_{13}(x, y, z, x', y', z') dl' \quad (2-10)$$

donde $fGreen_{13}$ viene dado por:

$$fGreen_{13}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{23}^k \cdot (-1)^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'+2kg)^2}} \right) \right] \quad (2-11)$$

donde:

$$\Gamma_{23} = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_3} \quad (2-12)$$

$$\Gamma_{23} = -\Gamma_{32} \quad (2-13)$$

Como ejemplo sobre el uso de las ecuaciones anteriores, a continuación se presenta un ejercicio sobre el cálculo de las curvas equipotenciales, sobre la superficie del suelo, debido a un contrapeso similar al mostrado en la Figura 2, pero que se encuentra en el tercer estrato, enterrado a una profundidad de 2.5 m.

- **Ejercicio 3:**

Calcular nuevamente las curvas equipotenciales, para el contrapeso mostrado en la Figura 2, pero asumiendo que se encuentra enterrado en el tercer estrato, a una profundidad de 2.5 m.

Datos del suelo y del electrodo:

$\rho_2 = 40(\Omega m)$	-Resistividad de la primera capa del suelo.
$\rho_3 = 150(\Omega m)$	-Resistividad de la segunda capa del suelo.
$g = 2 (m)$	-Espesor de la primera capa del suelo.
$z' = -2.5 (m)$	-Coordenada z' del electrodo.
$y' = 2 (m)$	-Coordenada y' del electrodo.
$a = 7 (m)$	-Límite de integración de la variable x' .
$b = 1 (m)$	-Límite de integración de la variable x' .
$\Gamma_{23} = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_2 + \rho_3} = -0.579$	-Coeficiente de reflexión ($\Gamma_{23} \neq \Gamma_{32}$).
$l = 6 (m)$	-Longitud del contrapeso.
$fGreen_{13}$	-es la función de Green dada por (2-11)(2-11).

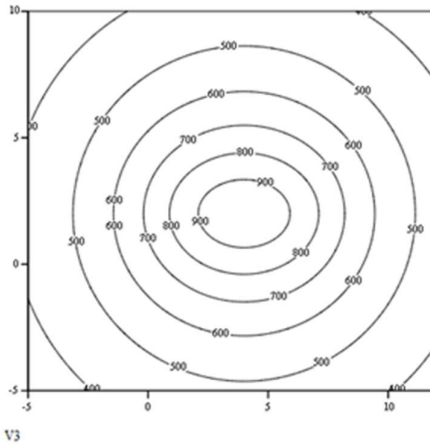


Fig. 5 Líneas equipotenciales sobre la superficie del suelo.

El potencial en la superficie del suelo vendrá dado por (2-10) y (2-11), donde la coordenada z debe tomar el valor de cero ya que todos los puntos que se encuentran sobre la superficie del suelo tienen coordenada $z = 0$:

$$V_{suelo}(x, y) = V_1(x, y, 0) = \frac{i}{(\sigma_2 + \sigma_3)l} \int_b^a fGreen_{13}(x, y, 0, x', y', z') dx' \quad (2-14)$$

La Figura 5 muestra las líneas equipotenciales obtenidas con (2-14):

2.5. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el segundo estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el tercer estrato.

El potencial que adquiere un punto que se encuentra en el segundo estrato debido a la inyección de corriente en la tierra a través de un electrodo ubicado en el estrato 3, viene dado por la siguiente ecuación:

$$V_2(x, y, z) = \frac{i}{(\sigma_2 + \sigma_3)l} \int_b^a fGreen_{23}(x, y, z, x', y', z') dl' \quad (2-15)$$

donde $fGreen_{23}$ viene dado por:

$$fGreen_{23}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{23}^k \cdot (-1)^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'-2kg)^2}} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{23}^k \cdot (-1)^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'+2k)^2}} \right) \right] \quad (2-16)$$

$$\Gamma_{23} = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_3} \quad (2-17)$$

$$\Gamma_{23} = -\Gamma_{32} \quad (2-18)$$

2.6. Función de Green y cálculo del potencial eléctrico de un punto que se encuentra ubicado en el tercer estrato debido a un electrodo que se encuentra inyectando corriente en el mismo estrato.

El potencial que adquiere un punto que se encuentra en el tercer estrato debido a la inyección de corriente en la tierra a través de un electrodo ubicado en el mismo estrato, viene dado por la siguiente ecuación:

$$V_3(x, y, z) = \frac{i}{\sigma_3 l} \int_b^a fGreen_{33}(x, y, z, x', y', z') dl' \quad (2-19)$$

donde $fGreen_{33}$ viene dado por:

$$fGreen_{33}(x, y, z, x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{23}^k \cdot (-1)^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'-2kg)^2}} \right) + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\Gamma_{23}^{k+1} \cdot (-1)^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z'+2(1-k)g)^2}} \right) + \dots + \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] \quad (2-20)$$

3. Calculo de la resistencia propia de una barra y la resistencia mutua entre barras, para suelos formados por dos capas.

Para calcular la resistencia de un electrodo como una barra, por lo general hay que realizar una doble integración a la función de Green que sea apropiada para el caso. Por lo general, la doble integración se resuelve numéricamente empleando alguna herramienta matemática como MatLab™, MathCad™ o cualquier otra herramienta para cálculo matemático.

3.1. Resistencia propia de una barra ubicada en la primera capa del suelo.

Para calcular la resistencia se requieren las coordenadas del electrodo, la Figura 6 muestra una barra enterrada en el suelo donde h es la profundidad a la cual se encuentra enterrado el extremo superior de la barra ($h \geq 0$) y l es la longitud de la barra ($l > 0$), la barra se encuentra enterrada en la capa superior del suelo que tiene un espesor g . Se asume que el suelo está constituido por dos capas de diferentes resistividades. Por otra parte, todos los puntos que formen parte de la superficie del suelo tienen coordenada $z = 0$, como se puede apreciar en la Figura 6.

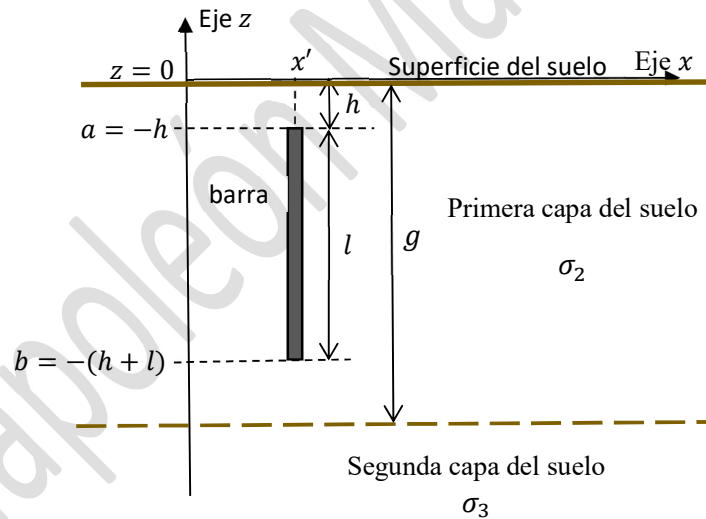


Fig. 6 Barra instalada en la primera capa del suelo.

Si por la barra se inyecta una corriente i , el potencial que adquiere algún punto del suelo y que se encuentre en la primera capa, puede ser obtenido con la ecuación (2-5) y la función de Green (2-6):

$$V_2(x, y, z) = \frac{i}{\sigma_2 l} \int_b^a fGreen_{2,2}(x, y, z, x', y', z') dz' \quad (3-1)$$

donde:

- a -Es la coordenada z' del extremo superior de la barra.
- b -Es la coordenada z' del extremo inferior de la barra donde $a > b$.

x' -Es la coordenada x de la barra.
 y' -Es la coordenada y de la barra.

La ecuación anterior se puede usar para calcular el potencial promedio que tiene la superficie de la barra, al evaluar las coordenadas x y y en la superficie de la misma:

$$x = x' + r \quad (3-2)$$

$$y = y' \quad (3-3)$$

donde r es el radio de la barra.

El potencial promedio de la barra se obtiene integrando nuevamente la ecuación (3-1) y usando las coordenadas dadas en (3-2) y (3-3) y la función de Green (2-6):

$$V_{barra} = \frac{i}{\sigma_2 l^2} \int_b^a \int_b^a fGreen_{22}(x' + r, y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-4)$$

De la ecuación anterior se obtiene la resistencia propia de la barra que se encuentra en la primera capa del suelo¹:

$$R_{barra} = \frac{1}{\sigma_2 l^2} \int_b^a \int_b^a fGreen_{22}(x' + r, y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-5)$$

donde:

$$a = -h$$

$$b = -(h + l)$$

3.2. Resistencia propia de una barra ubicada en la segunda capa del suelo.

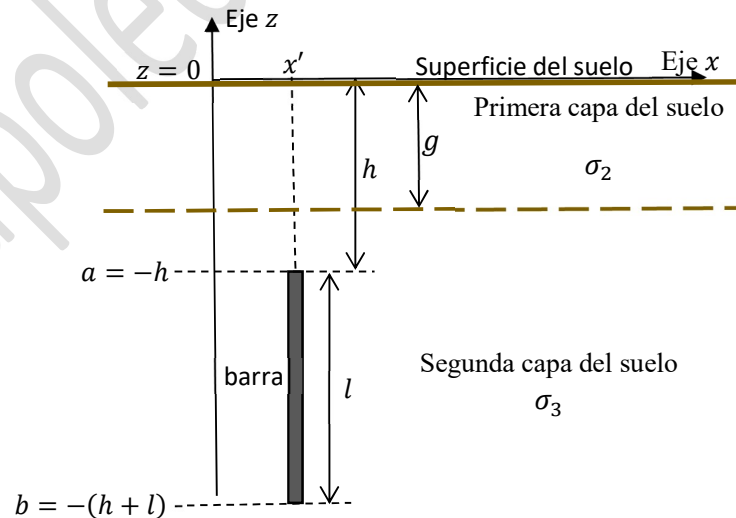


Fig. 7 Barra enterrada en la segunda capa del suelo

¹ Para más detalle sobre el cálculo de la resistencia, consultar el documento. *Sistemas de puesta a tierra. Parte tres.*

La Figura 7 muestra una barra enterrada en la segunda capa del suelo, donde h es la profundidad a la cual se encuentra enterrada el extremo superior de la barra ($h \geq 0$) y l es la longitud de la barra ($l > 0$). La primera capa del suelo tiene un espesor g . Se asume que el suelo está constituido por dos capas de diferentes resistividades.

El cálculo de la resistencia es muy similar al descrito en el punto 3.1. Si por la barra se inyecta una corriente i , el potencial que adquiere algún punto del suelo y que se encuentre en la segunda capa, puede ser obtenido con la ecuación (2-19) y la función de Green (2-20):

$$V_3(x, y, z) = \frac{i}{\sigma_3 l} \int_b^a fGreen_{33}(x, y, z, x', y', z') dz' \quad (3-6)$$

La ecuación anterior se puede emplear para calcular el potencial promedio que tiene la superficie del electrodo, realizando una segunda integración a la ecuación anterior con las coordenadas dadas en (3-2) y (3-3):

$$V_{barra} = \frac{i}{\sigma_3 l^2} \int_b^a \int_b^a fGreen_{33}(x' + r, y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-7)$$

De donde se obtiene la resistencia del electrodo situado en la segunda capa del suelo:

$$R_{barra} = \frac{1}{\sigma_3 l^2} \int_b^a \int_b^a fGreen_{33}(x' + r, y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-8)$$

donde:

$$a = -h$$

$$b = -(h + l)$$

3.3. Resistencia propia de una barra ubicada entre la primera y segunda capa del suelo.

La Figura 8 muestra una barra que ha quedado en contacto tanto con la primera capa como con la segunda capa del suelo.

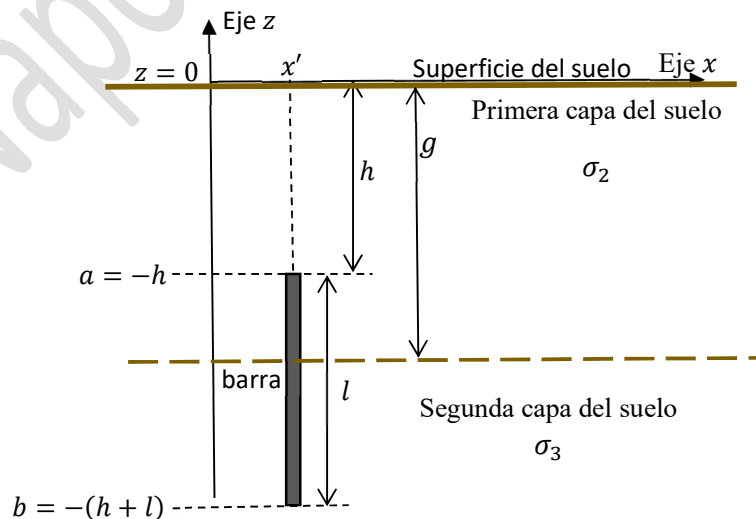


Fig. 8 Barra enterrada en un suelo formado por dos capas

La metodología para calcular la resistencia consiste en asumir que en lugar de tener una barra se tienen dos barras, una barra que se encuentra completamente en la primera capa y una segunda barra que se encuentra en la segunda capa de la tierra, tal como se muestra en la Figura 9.

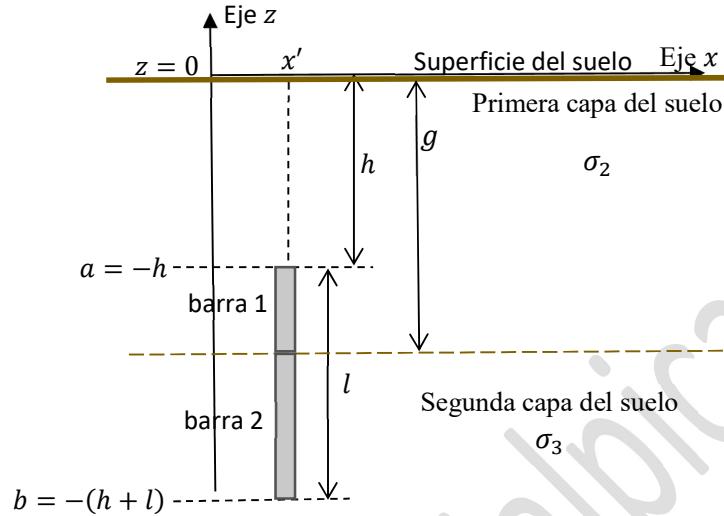


Fig. 9 Dos barras enterradas en el suelo

Para calcular la resistencia de la barra 1 mostrada en la Figura 9, se puede emplear la ecuación (3-5) y la función de Green (2-6):

$$R_{\text{barra 1}} = \frac{1}{\sigma_2 l_1^2} \int_{-g}^a \int_{-g}^a fGreen_{22}(x' + r, y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-9)$$

donde:

g -Es el espesor de la primera capa del suelo ($g > 0$) (m).

$a = -h$

$l_1 = |g - h|$ -Longitud de la barra 1

La resistencia de la segunda barra se obtiene con (3-8) y la función de Green (2-20):

$$R_{\text{barra 2}} = \frac{1}{\sigma_3 l_2^2} \int_b^{-g} \int_b^{-g} fGreen_{33}(x' + r, y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-10)$$

donde:

$b = -(h + l)$.

$l_2 = l - l_1$ -Longitud de la barra 2.

Ahora bien, entre las barras existe una resistencia mutua que debe ser considerada. Para calcular la resistencia mutua se asume que una de ellas inyecta corriente en el suelo y luego se calcula el potencial promedio que adquiere la otra barra. Por ejemplo, asúmase que a través de la barra 1, que se encuentra en la primera capa, se inyecta corriente en el suelo y se quiere obtener el potencial de un punto que se encuentra en la segunda capa, para ello se utiliza la ecuación (2-8) junto con la función de Green (2-9):

$$V_3(x, y, z) = \frac{i}{\sigma_2 l_1} \int_{-g}^a fGreen_{32}(x, y, z, x', y', z') dz' \quad (3-11)$$

donde x' y y' son las coordenadas del electrodo.

La ecuación anterior, que permite calcular el potencial en cualquier punto que se encuentre en la segunda capa del suelo puede ser usada para calcular el potencial promedio que adquiere la barra 2, al integrar la ecuación anterior empleando las coordenadas dadas en (3-2) y (3-3):

$$V_{\text{barra } 2} = \frac{i}{\sigma_2 l_1 l_2} \int_b^{-g} \int_{-g}^a f_{\text{Green}}(x' + r, y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-12)$$

donde r es el radio de la barra.

De la ecuación anterior se obtiene la resistencia mutua entre las barras:

$$R_{\text{mutua}} = \frac{1}{\sigma_2 l_1 l_2} \int_b^{-g} \int_{-g}^a f_{\text{Green}}(x' + r, y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-13)$$

Con las resistencias propias y mutuas dadas por (3-9)(3-10) y (3-13) se obtiene la resistencia de la barra²:

$$R_{\text{barra}} = \frac{R_{\text{barra } 1} \cdot R_{\text{barra } 2} - R_{\text{mutua}}^2}{R_{\text{barra } 1} + R_{\text{barra } 2} - 2R_{\text{mutua}}} \quad (3-14)$$

3.4. Resistencia mutua entre barras que se encuentran instaladas en la capa superior del suelo.

La Figura 10 muestra dos barras, instaladas verticalmente, ambas con longitudes iguales y enterradas a la misma profundidad h . Por la barra 1 se inyecta una corriente i_1 y por la barra 2 no se inyecta corriente. Se desea calcular la resistencia mutua que existe entre ambas barras, para ello se calculará primero el potencial V_2 que adquiere la barra 2 con respecto al infinito, debido a la corriente i_1 .

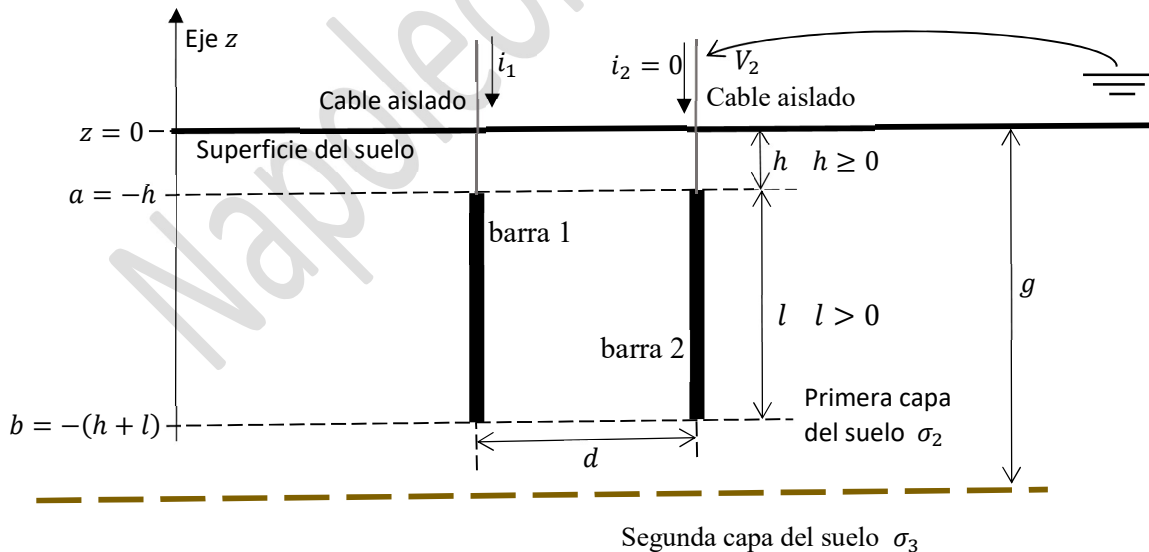


Fig. 10 Dos barras para puesta a tierra de iguales longitudes. Vista en elevación

² Consultar el capítulo 8 del documento *Sistemas de puesta a tierra. Parte 1.* para el cálculo de la resistencia de puesta a tierra formado por dos electrodos.

La Figura 11 muestra una vista en planta de las barras, donde se aprecia la separación d que existe entre ellas. Para ubicar la barra 1, se emplean las coordenadas primadas porque es en esta barra por donde se inyecta la corriente y para ubicar la barra 2, se emplean las coordenadas no primadas, porque es la barra donde se quiere calcular el potencial.

Para calcular el potencial promedio de la barra 2, se puede utilizar la ecuación (2-5) junto con la función de Green (2-6), ya que ambas barras se encuentran en la primera capa del suelo:

$$V_2(x, y, z) = \frac{i}{\sigma_2 l} \int_b^a fGreen_{22}(x, y, z, x', y', z') dz' \quad (3-15)$$

donde:

- x', y' -Son las coordenadas de la barra que inyecta corriente en el suelo (barra 1).
- x, y -Son las coordenadas de la barra 2.
- $a = -h$ -Límite de integración para la variable z' .
- $b = -(h + l)$ -Límite de integración para la variable z' .

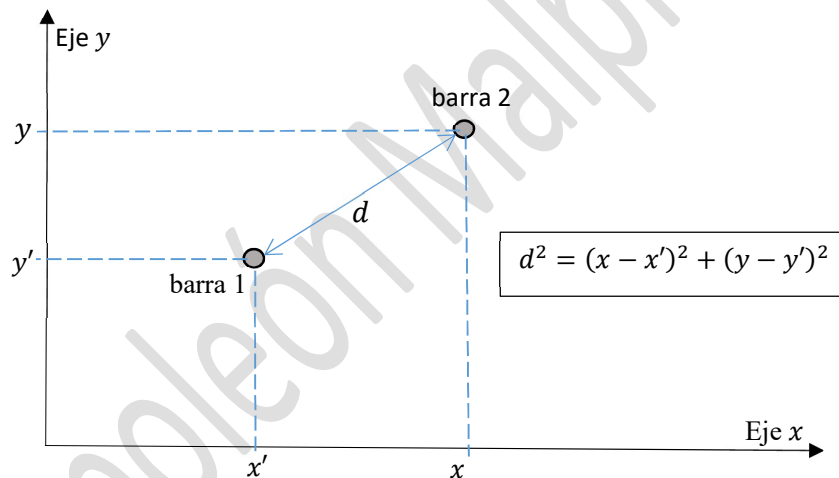


Fig. 11. Vista en elevación de las barras mostradas en la Figura 10

Al calcular el potencial promedio que adquiere la barra 2, con la ecuación anterior y con las coordenadas que se muestran en la Figura 11, se obtiene:

$$V_{barra\ 2} = \frac{i}{\sigma_2 l^2} \int_b^a \int_b^a fGreen_{22}(x', y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-16)$$

De la ecuación anterior se obtiene la resistencia mutua que existe entre las barras³:

$$R_{mutua} = \frac{1}{\sigma_2 l^2} \int_b^a \int_b^a fGreen_{22}(x', y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-17)$$

³ Para más detalle sobre el cálculo de la resistencia mutua, consultar el documento. *Sistemas de puesta a tierra. Parte tres.*

3.5. Resistencia mutua entre barras donde ambas se encuentran instaladas en la capa inferior del suelo.

La Figura 12 muestra dos barras, instaladas en la segunda capa del suelo, ambas con longitudes iguales y enterradas a la misma profundidad h .

El procedimiento de cálculo es muy similar al descrito en el punto anterior, que consiste en calcular el potencial promedio que tiene la barra 2, usando (2-19) y (2-20), asumiendo que por la barra 1 se inyecta una corriente al suelo, donde se obtiene lo siguiente:

$$R_{mutua} = \frac{1}{\sigma_3 l^2} \int_b^a \int_b^a fGreen_{33}(x', y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-18)$$

donde:

- x', y' -Son las coordenadas de la barra 1.
- x, y -Son las coordenadas de la barra 2.
- $a = -h$ -Límite de integración para las variables z' y z .
- $b = -(h + l)$ -Límite de integración para las variables z' y z .

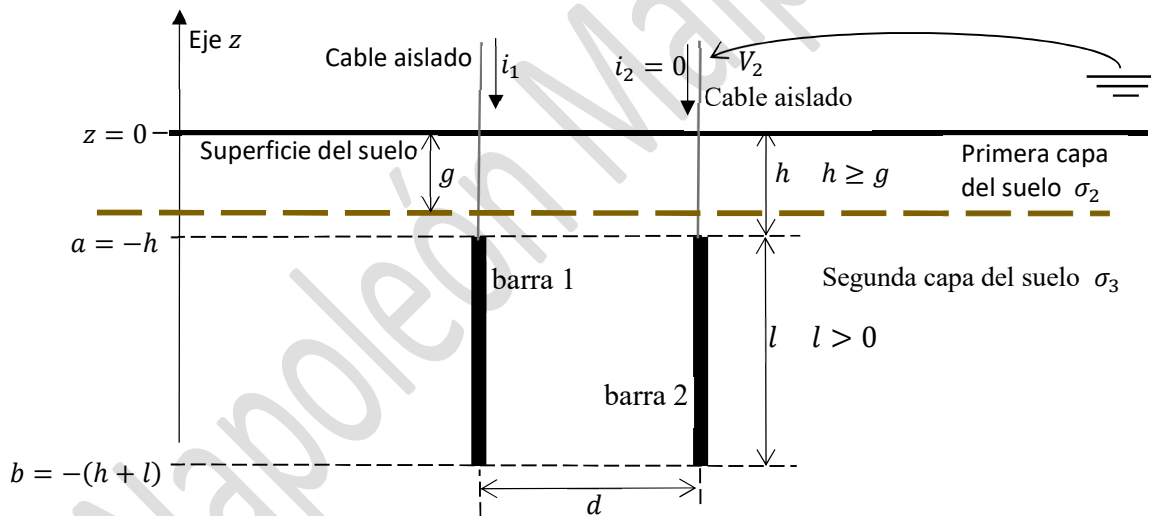


Fig. 12 Dos barras instaladas en la capa inferior del suelo.

3.6. Resistencia mutua entre barras donde ambas se encuentran instaladas entre las capas del suelo.

La Figura 13 muestra dos barras que se encuentran instaladas en contacto con ambas capas del suelo, se desea calcular la resistencia mutua entre las barras.

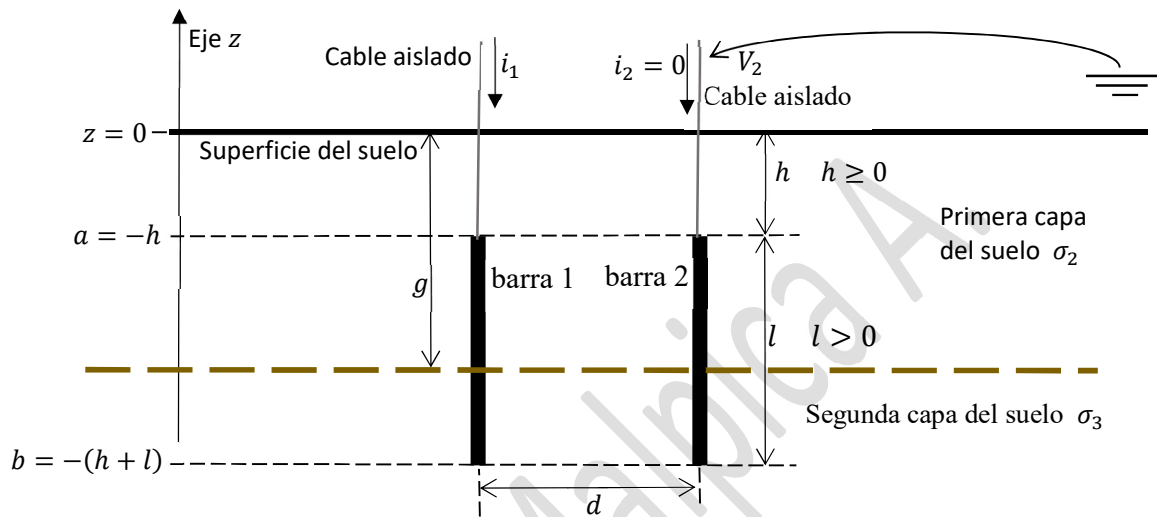


Fig. 13 Dos barras que se encuentran en contacto con ambas capas del suelo.

Para calcular las resistencias mutuas entre las barras, es necesario asumir que en lugar de tener dos barras, se tienen cuatro barras, tal como se muestran en la Figura 14.

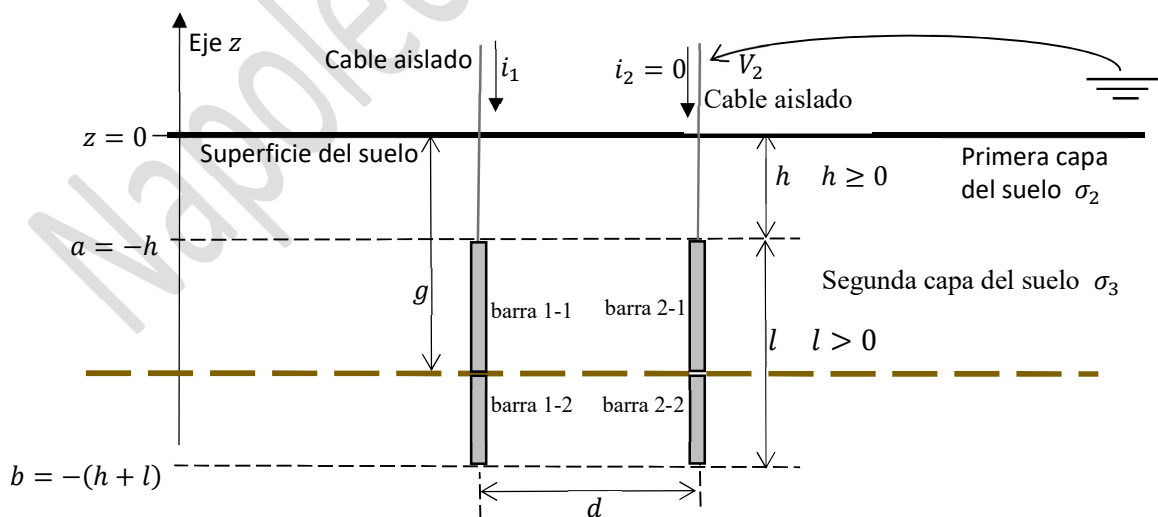


Fig. 14 Cuatro barras que se encuentran en contacto con ambas capas del suelo.

Ahora bien, si el problema se transforma en tener cuatro barras, entonces estará presentes más de una resistencia mutua en el sistema.

De acuerdo a la Figura 14, las longitudes de los electrodos son las siguientes:

$$\begin{aligned}
l_{1-1} &= |g - h| && \text{-Longitud de la barra 1-1} \\
l_{2-1} &= |g - h| && \text{-Longitud de la barra 2-1} \\
l_{1-2} &= l - l_{1-1} && \text{-Longitud de la barra 1-2.} \\
l_{2-2} &= l - l_{2-1} && \text{-Longitud de la barra 2-2.}
\end{aligned}$$

- *Cálculo de la resistencia mutua entre la barra 1-1 y la barra 2-1.*

Para este caso, como ambas barras se encuentran en la primera capa del suelo, entonces se puede aplicar la ecuación (3-17):

$$R_{mutua\ 1-1_2-1} = \frac{1}{\sigma_2(l_{1-1})(l_{2-1})} \int_{-g}^{-h} \int_{-g}^{-h} fGreen_{22}(x', y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-19)$$

donde:

$$\begin{aligned}
x', y' &&& \text{-Son las coordenadas de la barra 1-1.} \\
x, y &&& \text{-Son las coordenadas de la barra 2-1.}
\end{aligned}$$

- *Cálculo de la resistencia mutua entre la barra 1-2 y la barra 2-2.*

Como ambas barras se encuentran en la segunda capa del suelo, entonces se puede aplicar la ecuación (3-18):

$$R_{mutua\ 1-2_2-2} = \frac{1}{\sigma_3(l_{1-2})(l_{2-2})} \int_b^{-g} \int_b^{-g} fGreen_{33}(x', y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-20)$$

donde:

$$\begin{aligned}
x', y' &&& \text{-Son las coordenadas de la barra 1-2.} \\
x, y &&& \text{-Son las coordenadas de la barra 2-2.}
\end{aligned}$$

- *Resistencia mutua entre la barra 1-1 y la barra 1-2*

En este caso, una barra se encuentra en la primera capa del suelo y la otra barra en la segunda capa, entonces la resistencia mutua se puede obtener con la ecuación (3-13) :

$$R_{mutua\ 1-1_1-2} = \frac{1}{\sigma_2(l_{1-1})(l_{1-2})} \int_b^{-g} \int_{-g}^{-h} fGreen_{32}(x' + r, y', z, x', y', z') dz' dz \quad (3-21)$$

donde

$$\begin{aligned}
r &&& \text{-Es el radio de la barra.} \\
x', y' &&& \text{-Son las coordenadas de la barra 1-1.}
\end{aligned}$$

- *Resistencia mutua entre la barra 1-1 y la barra 2-2*

En este caso, una barra se encuentra en la primera capa del suelo, y la otra barra se encuentra en la segunda capa del suelo.

$$R_{mutua\ 1-1_2-2} = \frac{1}{\sigma_2(l_{1-1})(l_{2-2})} \int_b^{-g} \int_{-g}^{-h} fGreen_{32}(x, y, z, x', y', z') dz' dz \quad (3-22)$$

donde:

$$\begin{aligned}
x', y' &&& \text{-Son las coordenadas de la barra 1-1.} \\
x, y &&& \text{-Son las coordenadas de la barra 2-2}
\end{aligned}$$

4. Calculo de la resistencia propia y mutuas entre contrapesos, para suelo formados por dos capas.

Para calcular la resistencia de un contrapeso, el procedimiento básicamente es el mismo que se explicó para una barra, que consiste en realizar una doble integración de la función de Green.

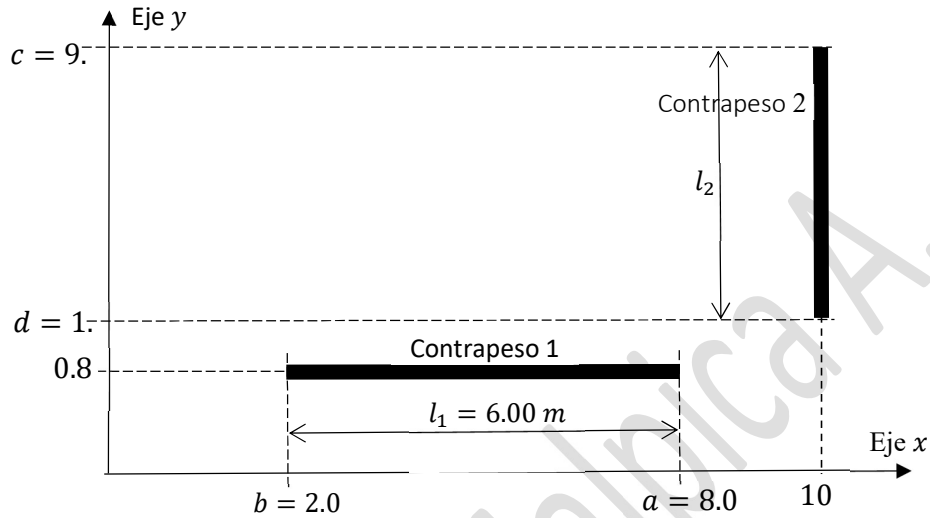


Fig. 15 Vista en planta de dos contrapesos enterrados en el suelo

La Figura 15 muestra dos contrapesos enterrados en el suelo, y se desea obtener tanto la resistencia propia de cada electrodo, así como la resistencia mutua que existe entre ellos.

La doble integración de la función de Green se realiza en la misma dirección que apunta el electrodo, por ejemplo, para el cálculo de la resistencia del contrapeso 1 de la Figura 14, se integra en dirección del eje x y para el contrapeso 2 la integración se realiza en la dirección del eje y .

4.1. Resistencia propia de un contrapeso que se encuentra en la primera capa del suelo.

Para calcular la resistencia propia de un contrapeso que se encuentra en la primera capa del suelo, como el contrapeso N° 1 que se muestra en la Figura 15, primero se asume que por dicho electrodo se inyecta a la tierra una corriente i_1 , entonces el potencial en cualquier punto del suelo se puede obtener con la ecuación (2-5), donde la integración se realiza en la dirección del eje x , ya que el electrodo se encuentra en la misma dirección:

$$V_2(x, y, z) = \frac{i_1}{\sigma_2 l_1} \int_b^a fGreen_{2,2}(x, y, z, x', y', z') dx' \quad (4-1)$$

donde:

- a -Coordenada x' de un punto extremo del contrapeso 1 (Ver la Fig. 15).
- b -Coordenada x' del otro extremo del contrapeso 1 (Ver la Fig. 15).
- $a > b$
- l_1 -Longitud del contrapeso 1
- $a = b + l_1$

- i_1 -Corriente inyectada a través del contrapeso 1
- y' -Coordenada y' del contrapeso.
- z' -Coordenada z' del contrapeso.
- $z' = -h$
- h -Profundidad a la cual se encuentra el contrapeso ($h > 0$).
- $l_1 = |a - b|$

La ecuación anterior permite calcular el potencial en cualquier punto del suelo con coordenadas (x, y, z) y ubicado en la primera capa del mismo. El potencial promedio del electrodo se obtiene al integrar la ecuación anterior pero evaluada sobre su superficie; para ello, las coordenadas (x, y, z) se evalúan en puntos que se encuentren sobre la superficie del electrodo, la Figura 16 muestra un corte del electrodo, donde se indica las coordenadas de un punto de la superficie.

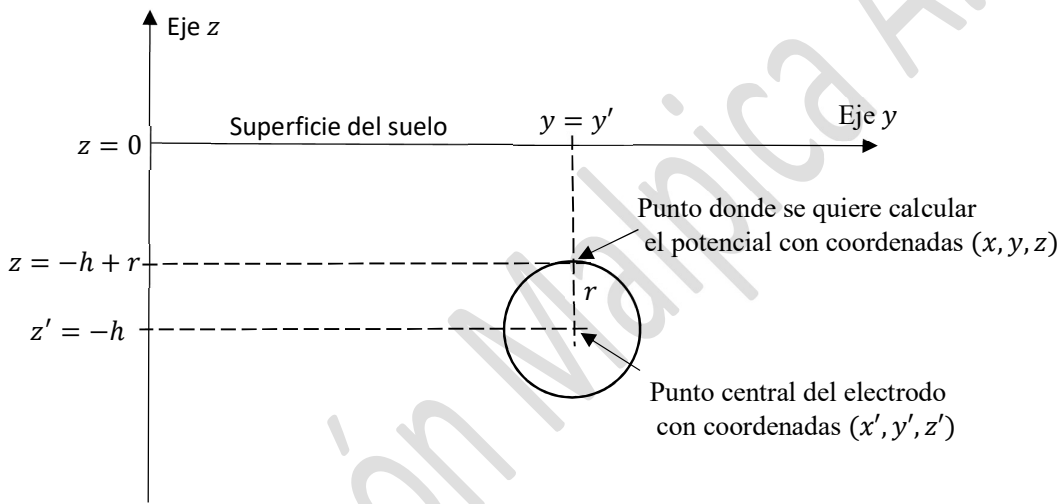


Fig. 16 Corte de un contrapeso, situado paralelo al eje de coordenadas x .

De acuerdo a la Figura 16, los puntos donde se quiere calcular el potencial tienen coordenadas $y = y'$ y $z = -h + r$; donde r es el radio; al usar estas coordenadas para evaluar la función de Green en la ecuación anterior y al integrar la ecuación, se obtiene el potencial promedio del contrapeso:

$$V_{\text{contrapeso 1}} = \frac{i_1}{\sigma_2(l_1)^2} \int_b^{b+l_1} \int_b^{b+l_1} fGreen_{2,2}(x, y', -h + r, x', y', -h) dx' dx \quad (4-2)$$

De donde se extrae la resistencia propia del contrapeso 1 que se encuentra paralelo al eje x :

$$R_{\text{propia_contrapeso 1}} = \frac{1}{\sigma_2(l_1)^2} \int_b^{b+l_1} \int_b^{b+l_1} fGreen_{2,2}(x, y', -h + r, x', y', -h) dx' dx \quad (4-3)$$

En cuanto al contrapeso 2 y que se muestra en la Figura 15, situado paralelo al eje y , la resistencia propia se obtiene por analogía, realizando doble la integración de (2-5) en dirección del eje y :

$$R_{\text{propia_contrapeso 2}} = \frac{1}{\sigma_2(l_2)^2} \int_a^{d+l_2} \int_a^{d+l_2} fGreen_{2,2}(x', y, -h + r, x', y', -h) dy' dy \quad (4-4)$$

donde:

- c -Coordenada y' de un punto extremo del contrapeso 2 (Ver la Fig. 15).
- d -Coordenada y' del otro extremo del contrapeso 2 (Ver la Fig. 15).

$c > d$	
l_2	-Longitud del contrapeso 2.
$c = d + l_2$	
x'	-Coordenada x' del contrapeso.
$x' = x$	
z'	-Coordenada z' del contrapeso.
$z' = -h$	
$z = -h + r$	
h	-Profundidad a la cual se encuentra el contrapeso ($h > 0$).
$l_2 = c - d $	-Longitud del contrapeso.
r	-Radio del contrapeso

Nota: el valor de b en la ecuación (4-3) y el valor de d en la ecuación (4-4) se pueden tomar nulos o cero, sin alterar el valor de la resistencia.

4.2. Resistencia propia de un contrapeso que se encuentra en la segunda capa del suelo.

El cálculo es muy similar al descrito en el punto anterior, solo hay que tener en cuenta para este caso, que se debe usar las ecuaciones (2-19) y (2-20) ya que son las adecuadas para electrodos que se encuentren en la segunda capa del suelo.

La resistencia propia de un contrapeso que se encuentre paralelo al eje x , como el contrapeso 1 de la Figura 15 viene dado por:

$$R_{propia_contrapeso\ 1} = \frac{1}{\sigma_3(l_1)^2} \int_b^{b+l_1} \int_b^{b+l_1} fGreen_{3\ 3}(x, y', -h + r, x', y', -h) dx' dx \quad (4-5)$$

En cuanto al contrapeso 2 que se muestra en la Figura 15, paralelo al eje y , la resistencia propia se obtiene con la doble integración en dirección del eje y :

$$R_{propia_contrapeso\ 2} = \frac{1}{\sigma_3(l_2)^2} \int_d^{d+l_2} \int_d^{d+l_2} fGreen_{3\ 3}(x', y, -h + r, x', y', -h) dy' dy \quad (4-6)$$

Nota: el valor de b en la ecuación (4-5) y el valor de d en la ecuación (4-6) se pueden tomar nulos o ceros, sin alterar el valor de la resistencia.

4.3. Resistencia mutua entre contrapesos que se encuentran en la primera capa del suelo.

- Contrapesos que forman entre ellos un ángulo de 90 grados.

En este apartado se calcula la resistencia mutua entre dos contrapesos, como los mostrados en la figura 15 y que forman un ángulo de 90 grados, para calcular la resistencia mutua entre contrapesos, hay que asumir que solamente uno de ellos inyecta corriente al suelo, se asumirá que el electrodo No 1 es el que inyecta corriente en la tierra, bajo esta condición, se calcula el potencial promedio que adquiere el electrodo No 2. La resistencia mutua se obtiene como la razón entre el potencial promedio del electrodo No 2 y la magnitud de la corriente que se inyecta por el electrodo No 1.

Si el electrodo No 1 inyecta corriente en la tierra, entonces este electrodo genera un potencial en cualquier punto del suelo, y para la segunda capa del suelo este potencial se puede obtener con las ecuaciones (2-5) y (2-6) y empleando las coordenadas del propio electrodo:

$$V_2(x, y, z) = \frac{i}{\sigma_2 l_1} \int_b^a fGreen_{22}(x, y, z, x', y', z') dx' \quad (4-7)$$

donde:

- y' -coordenada y del electrodo No 1 (ver la Figura 15).
- $z' = -h$ -coordenada z del electrodo No 1
- h -profundidad a la cual se encuentran ambos contrapesos.

Luego, con la ecuación anterior, se calcula el potencial promedio que tiene la superficie del electrodo No 2, realizando para ello una segunda integración, a lo largo de la superficie del mismo. Como el electrodo se encuentra paralelo al eje y , la segunda integración se realiza en el mismo eje y .

$$V_{contrapeso\ 2} = \frac{i_1}{\sigma_2 l_1 l_2} \int_d^c \int_b^a fGreen_{22}(x, y, z, x', y', -h) dx' dy \quad (4-8)$$

donde:

- x -coordenada x del electrodo No 2 (ver la Figura 15).
- $z = -h + r$ -coordenada z en la superficie del electrodo No 2 .
- r -radio del electrodo

De la ecuación anterior se extrae la resistencia mutua entre los contrapesos que forman entre ellos un ángulo de 90 grados:

$$R_{mutua\ cont\ 90^\circ} = \frac{1}{\sigma_2 l_1 l_2} \int_d^c \int_b^a fGreen_{22}(x, y, -h + r, x', y', -h) dx' dy \quad (4-9)$$

- Contrapesos que forman entre ellos un ángulo de 0 grados.

La Figura 17 muestra dos contrapesos donde ambos se encuentran paralelos al eje x , los contrapesos se encuentran enterrados a una profundidad h , la resistencia mutua se obtiene de manera similar como se explicó en el caso de formar 90 grados.

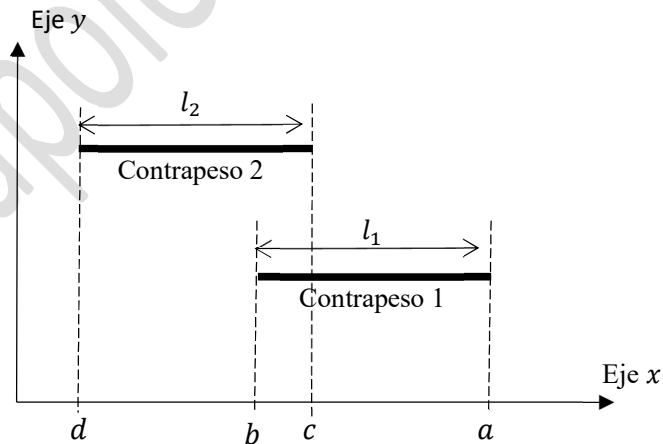


Fig. 17 Contrapesos paralelos al eje x .

La resistencia mutua entre los contrapesos que forman un ángulo de cero grados o se encuentran en paralelo, viene dado por:

$$R_{mutua\ cont\ 0^\circ} = \frac{1}{\sigma_2 l_1 l_2} \int_d^c \int_b^a fGreen_{22}(x, y, -h + r, x', y', -h) dx' dy \quad (4-10)$$

donde:

- y' -Es la coordenada y del primer contrapeso (ver la Figura 16).
- y -Es la coordenada y del segundo contrapeso.

4.4. Resistencia mutua entre contrapesos que se encuentran en la segunda capa del suelo.

- Contrapesos que forman entre ellos un ángulo de 90 grados.

Si los contrapesos que se muestran en la Figura 15, se encuentran en la segunda capa del suelo, la resistencia mutua vendrá dada por:

$$R_{mutua\ cont\ 90^\circ} = \frac{1}{\sigma_3 l_1 l_2} \int_d^c \int_b^a fGreen_{3\ 3}(x, y, -h + r, x', y', -h) dx' dy \quad (4-11)$$

- Contrapesos que forman entre ellos un ángulo de 0 grados.

La resistencia mutua entre contrapesos que se encuentran alineados o paralelos, como los mostrados en la Figura 17, la resistencia se obtiene con la siguiente ecuación:

$$R_{mutua\ cont\ 0^\circ} = \frac{1}{\sigma_3 l_1 l_2} \int_d^c \int_b^a fGreen_{3\ 3}(x, y, -h + r, x', y', -h) dx' dx \quad (4-12)$$

donde:

- y' -Es la coordenada y del primer contrapeso (ver la Figura 17).
- y -Es la coordenada y del segundo contrapeso.

5. Calculo de la resistencia mutuas entre un contrapeso y una barra para suelo formados por dos capas.

5.1. Resistencia mutua si ambos electrodos se encuentran en la primera capa del suelo.

La Figura 18 muestra una barra y un contrapeso que se encuentra paralelo al eje x , donde ambos se encuentran instalados en la primera capa del suelo.

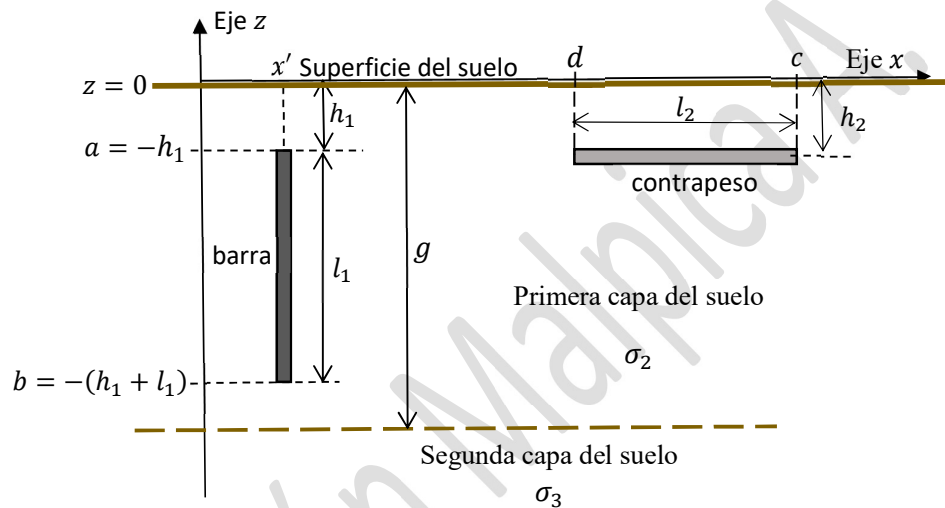


Fig. 18 Una barra y un contrapeso instalados en la primera capa del suelo.

Como el cálculo de la resistencia mutua es muy similar a los casos expuestos con anterioridad, por lo tanto no se dedicará mayor atención al cálculo:

$$R_{mutua\ barra-contr} = \frac{1}{\sigma_2 l_1 l_2} \int_d^c \int_b^a f_{Green_2} (x, y, z, x', y', z') dz' dx \quad (5-1)$$

donde:

- x', y' -coordenadas x y y de la barra.
- a, b -coordenadas z de los puntos extremos de la barra ($a > b$)
- $a = -h_1$
- h_1 -profundidad a la cual se encuentra enterrada la parte superior de la barra ($h_1 \geq 0$)
- l_1 -longitud de la barra ($l_1 > 0$)
- $b = -(h_1 + l_1)$
- y, z -coordenadas y y z del contrapeso.
- c, d -coordenadas x de los puntos extremos del contrapeso ($c > d$).
- h_2 -profundidad a la cual se encuentra enterrado el contrapeso ($h_2 \geq 0$).
- l_2 -longitud del contrapeso ($l_2 > 0$).
- $c = (d + l_2)$

5.2. Resistencia mutua si ambos electrodos se encuentran en la segunda capa del suelo.

La Figura 19 muestra un contrapeso y una barra donde ambos se encuentran en la capa más profunda del suelo.

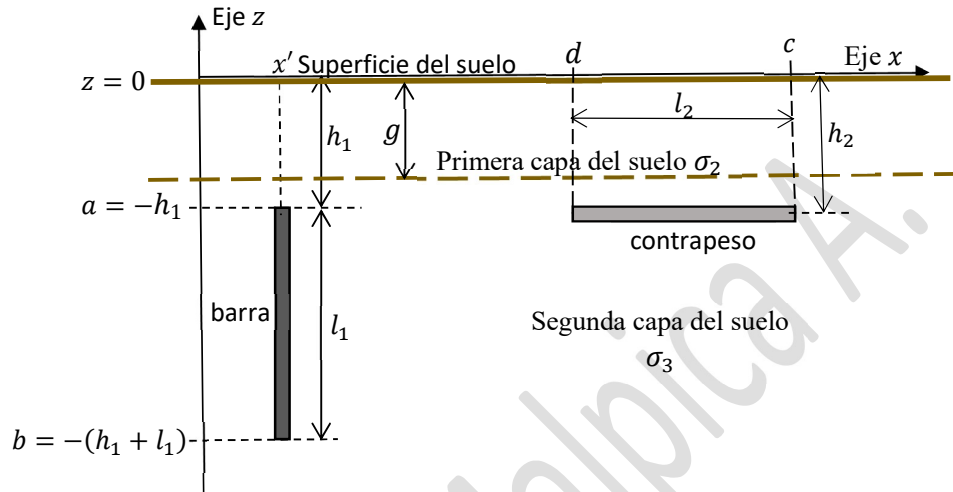


Fig. 19 Un contrapeso y una barra instalados en la segunda capa del suelo.

La resistencia mutua entre ambos electrodos se obtiene con la siguiente ecuación:

$$R_{mutua\ barra-contrapeso} = \frac{1}{\sigma_3 l_1 l_2} \int_d^c \int_b^a f_{Green_3}(x, y, z, x', y', z') dz' dx \quad (5-2)$$

donde:

- x', y' -coordenadas x y y de la barra.
- a, b -coordenadas z de los puntos extremos de la barra ($a > b$)
- $a = -h_1$
- h_1 -profundidad a la cual se encuentra enterrada la parte superior de la barra ($h_1 \geq 0$)
- l_1 -longitud de la barra ($l_1 > 0$)
- $b = -(h_1 + l_1)$
- y, z -coordenadas y y z del contrapeso.
- c, d -coordenadas x de los puntos extremos del contrapeso ($c > d$).
- h_2 -profundidad a la cual se encuentra enterrado el contrapeso ($h_2 \geq 0$).
- l_2 -longitud del contrapeso ($l_2 > 0$).
- $c = (d + l_2)$

Referencias

Dawalibi F., Mukhedkar D. Optimun Design of Substation Grounding in a two layer Earth Structure. Part I – Analytical Study, IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-94, no. 2, March/April 1975.

Malpica Wilmer Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 3. Apuntes del curso. Universidad Central de Venezuela, marzo 2022.

Malpica Wilmer Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 2. Apuntes del curso. Universidad Central de Venezuela, marzo 2022.

Malpica Wilmer Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 1. Apuntes del curso. Universidad Central de Venezuela, marzo 2022.

Napoleón Malpica A.

A Anexo A

Cálculo de un sistema de puesta a tierra formado por una barra y un contrapeso .

En este anexo se emplea el programa MathCad™ para calcular la resistencia de puesta a tierra de un sistema formado por una barra y un contrapeso, como se muestran en la Figura A1. Se eligió este programa porque la simbología utilizada para la codificación es igual a la simbología empleada en cualquier texto o curso de matemáticas, pero puede haber programas o herramientas de cálculo que resulten más adecuados o ventajosos para elaborar rutinas de cálculo para sistemas de puesta a tierra.

En cuanto al suelo, se asume que está formado por dos capas y en cuanto a los electrodos, la barra se encuentra en contacto con ambas capas, y el contrapeso se encuentra en la primera capa del suelo, tal como se muestra en la Figura A1.

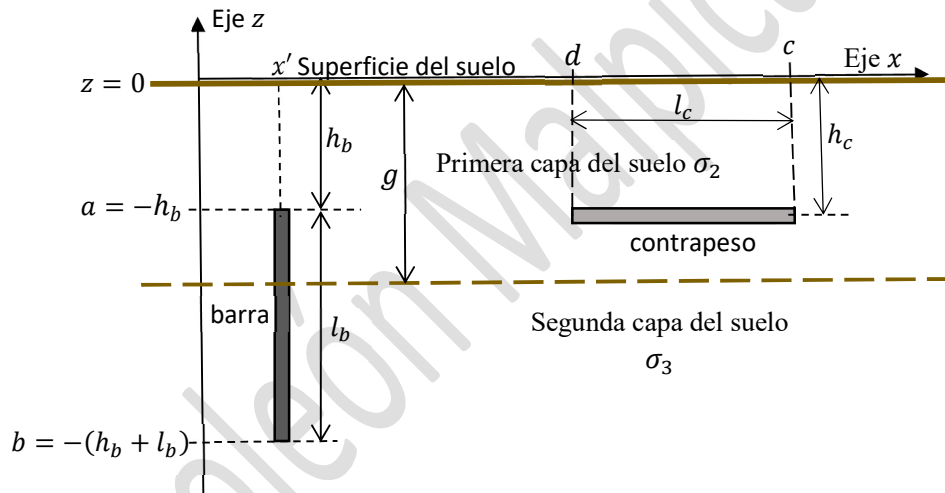


Fig A1 Sistema de puesta a tierra formado por una barra y un contrapeso.

En cuanto a la Figura A1, h_b es la profundidad que se encuentra el extremo superior de la barra y l_b su longitud, h_c es la profundidad que se encuentra el contrapeso y l_c su longitud, el contrapeso se encuentra situado paralelo al eje x .

Para calcular la resistencia de puesta a tierra, como la barra se encuentra en contacto con ambas capas, en lugar de asumir que se tienen dos electrodos, hay que asumir que se tienen tres electrodos como se muestran en la Figura A2.

Datos del suelo:

$\rho_2 = 150 (\Omega m)$	-resistividad primera capa del suelo.
$\rho_3 = 70 (\Omega m)$	-resistividad segunda capa del suelo.
$g = 3 (m)$	-espesor primera capa del suelo.

Datos de los electrodos:

Coordenadas y datos de la barra:

$x = 3 (m)$	-coordenada x .
$y = 3 (m)$	-coordenada y .
$r = 0.006 (m)$	-radio de la barra.
$h_b = 0.5(m)$	-profundidad que se encuentra el extremo superior de la barra
$a = -h_b = -0.5(m)$	-coordenada z superior de la barra.
$l_b = 5.0(m)$	-longitud de la barra.
$b = -(l_b + h_b) = -5.5 (m)$	-coordenada z del extremo inferior de la barra.

Coordenadas y datos del contrapeso:

$h_c = 0.5(m)$	-profundidad a la cual se encuentra el contrapeso.
$z = -h_c = -0.5 (m)$	-coordenada z del contrapeso.
$y = 3 (m)$	-coordenada y del contrapeso.
$r = 0.006 (m)$	-radio de la barra.
$d = 3.0 (m)$	-coordenada x de un extremo del contrapeso. $c > d$
$l_c = 6.0(m)$	-longitud del contrapeso.
$c = -(l_c + d) = 9(m)$	-coordenada x del otro extremo del contrapeso.

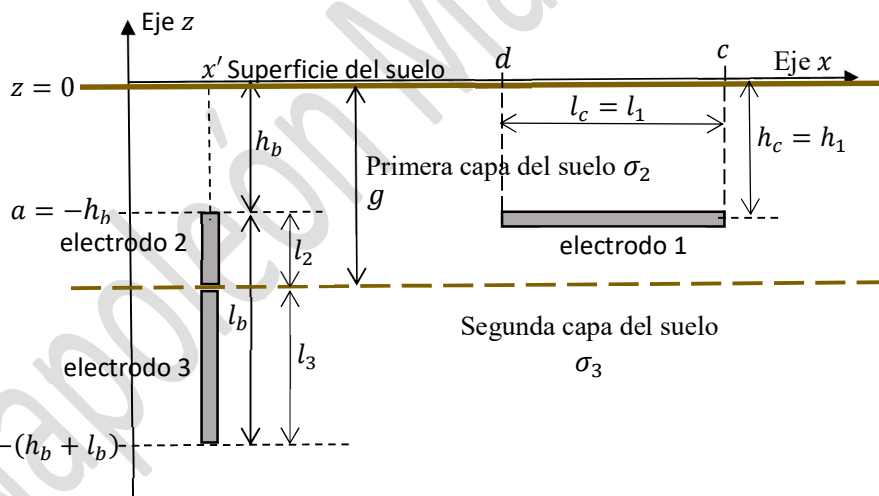


Fig. A2. Barra y contrapeso formando un sistema de puesta a tierra

A continuación se presenta el cálculo realizado con MathCad™, donde además de realizar el cálculo de la resistencia de puesta a tierra, también se calcula el aumento del potencial del sistema de puesta a tierra (Ground Potential Rise) GPR, si la máxima corriente de la malla⁴ I_G es de 600A y por último se obtienen las líneas equipotenciales en la superficie del suelo

⁴ Consultar el punto 13.4 del documento *Sistemas de puesta a tierra. Parte 2* para máxima corriente de la malla.

Calculo de resistencias de puesta a tierra formada por una barra y un contrapeso, asumiendo que el suelo esta formado por dos capas.

1) Datos del suelo:

$\rho_2 := 150$ (ohm m) Resistividad primera capa de la tierra.
 $\rho_3 := 70$ (ohm m) Resistividad segunda capa de la tierra.
 $g := 3$ (m) es el espesor de la primera capa de tierra
 $\sigma_2 := \frac{1}{\rho_2}$ (S/m) Conductividad primera capa de la tierra
 $\sigma_2 = 6.667 \times 10^{-3}$ (S/m) Conductividad primera capa de la tierra
 $\sigma_3 := \frac{1}{\rho_3}$ (S/m) Conductividad segunda capa de la tierra
 $\sigma_3 = 0.014$ (S/m) Conductividad segunda capa de la tierra
 $\Gamma_{32} := \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3}$ Coeficiente de reflexión
 $\Gamma_{32} = -0.364$ Coeficiente de reflexión
 $\Gamma_{23} := -\Gamma_{32}$

2) Otros datos:

$n := 25$ Numero de imágenes a considerar en los cálculos.

3) Funciones de Green:

3.1 Función de Green para calcular el potencial de un punto situado en el segundo estrato, si la fuente se encuentra también en el segundo estrato

$$f_{\text{Green22}}(x, y, z, xp, yp, zp) := \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-xp)^2 + (y-yp)^2 + (z-zp+2\cdot k\cdot g)^2}} \right] \dots \\ & + \sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-xp)^2 + (y-yp)^2 + (z+zp-2\cdot k\cdot g)^2}} \right] \dots \\ & + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-xp)^2 + (y-yp)^2 + (z+zp+2\cdot k\cdot g)^2}} \right] \dots \\ & + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-xp)^2 + (y-yp)^2 + (z-zp-2\cdot k\cdot g)^2}} \right] \dots \end{aligned} \right]$$

3.2 Función de Green para calcular el potencial de un punto situado en el tercer estrato, si la fuente se encuentra en el segundo estrato

$$f_{\text{Green32}}(x, y, z, x_p, y_p, z_p) := \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma 32^k + \Gamma 32^{k+1}}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z + z_p - 2 \cdot k \cdot g)^2}} \right] \dots \right] + \sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma 32^k + \Gamma 32^{k+1}}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p - 2 \cdot k \cdot g)^2}} \right]$$

3.3 Función de Green para calcular el potencial de un punto situado en el segundo estrato, si la fuente se encuentra en el tercer estrato.

$$f_{\text{Green23}}(x, y, z, x_p, y_p, z_p) := \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma 23^k \cdot (-1)^k}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p + 2 \cdot k \cdot g)^2}} \right] \dots \right] + \sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma 23^k \cdot (-1)^k}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z + z_p - 2 \cdot k \cdot g)^2}} \right]$$

3.4 Función de Green para calcular el potencial de un punto situado en el tercer estrato, si la fuente se encuentra en el tercer estrato.

$$f_{\text{Green33}}(x, y, z, x_p, y_p, z_p) := \frac{1}{4\pi} \cdot \left[\sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma 23^{k+1} \cdot (-1)^k}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + [z + z_p + (1 - k) \cdot 2 \cdot g]^2}} \right] \dots \right] + \sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma 23^k \cdot (-1)^k}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z + z_p - 2 \cdot k \cdot g)^2}} \right] \dots + \frac{1}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 + (z - z_p)^2}}$$

4. Resistencia propia del contrapeso o del primer electrodo:

$r := 0.006$	Radio del electrodo (m)
$hc := 0.5$	Profundidad a la cual se encuentra el contrapeso (m)
$z_p := -hc$	Coordenada z del electrodo (m)
$y_p := 3$	Coordenada y del electrodo (m)
$y := y_p$	Coordenada y de la superficie del electrodo (m)
$z := z_p + r$	Coordenada z de la superficie del electrodo (m)
$z = -0.494$	
$x_p := 9$	Coordenada x de un extremo del electrodo (m).

d := 3 Coordenada x del otro extremo del electrodo
 long1 := c - d Longitud del contrapeso

long1 = 6 Longitud del electrodo (m)

$$R11 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot \text{long1}^2} \cdot \int_d^c \int_d^c f_{\text{Green22}}(x, y, z, x_p, y_p, z_p) dx_p dx$$

R11 = 30.518 (ohm) Resistencia propia del electrodo 1

5. Resistencia propia del electrodo No 2:

Coordenadas del electrodo:

xp := 3 Coordenada x del electrodo (m).
 yp := 3 Coordenada y del electrodo (m).
 hb := 0.5 Profundidad a la cual se encuentra el extremo superior del electrodo (m)
 r = 6 × 10⁻³ Radio del electrodo (m)
 x := xp + r Coordenada x de la superficie del electrodo (m)
 x = 3.006
 yp := yp Coordenada y de la superficie del electrodo (m)
 y = 3
 a := -hb Coordenada z del extremo superior de la barra (m)
 long2 := a - (-g)
 long2 = 2.5 Longitud del electrodo 2 (m)

$$R22 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot \text{long2}^2} \cdot \int_{-g}^a \int_{-g}^a f_{\text{Green22}}(x, y, z, x_p, y_p, z_p) dz_p dz$$

R22 = 54.576

6 Resistencia propia del electrodo No 3:

Coordenadas:

xp := 3 Coordenada x del electrodo (m)
 yp := 3 Coordenada y del electrodo (m)
 r = 6 × 10⁻³ Radio(m)

$x := xp + r$ Coordenada x de la superficie (m)
 $x = 3.006$

$y := yp$ Coordenada y de la superficie (m)
 $y = 3$

$long3 := 2.5$ Longitud del electrodo (m)

$b := -(long3 + hb)$ Coordenada z del extremo inferior del electrodo (m)

$h := -5.5$ (m)

$$R33 := \frac{1}{\sigma_3 \cdot long3^2} \int_b^{-g} \int_b^{-g} fGreen33(x, y, z, xp, yp, zp) dzp dz$$

$R33 = 27.126$ (ohm)

7 Resistencia mutua entre las barras o los electrodos 2 y 3

Se asume que el Electrodo No 3 es el que inyecta corriente en la tierra

$$R23 := \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_3) \cdot long2 \cdot long3} \int_b^{-g} \int_{-g}^a fGreen23(x, y, z, xp, yp, zp) dzp dz$$

$R23 = 4.535$ Resistencia mutua R12 (ohm)

$R32 := R23$

8 Resistencia mutua entre el electrodo 1 (contrapeso) y el electrodo 3

Se asume que el Electrodo No 3 es el que inyecta corriente en la tierra

Coordenadas primadas del electrodos 3:

$xp = 3$ Coordenada x electrodo 3 (m)

$yp = 3$ Coordenada y del electrodo 3 (m)

Coordenadas del electrodo 1:

$z := -hb + r$ Coordenada z (m)

$z = -0.494$

$y := 3$ Coordenada y (m)

$$R13 := \frac{1}{(\sigma_2 + \sigma_3) \cdot \text{long1} \cdot \text{long3}} \int_d^c \int_b^{-g} f_{\text{Green23}}(x, y, z, xp, yp, zp) dzp dx$$

$R13 = 2.541$ Resistencia mutua R13 (ohm)

$R31 := R13$

9 Resistencia mutua entre el electrodo 1 y el electrodo 2

Se asume que el Electrodo No 2 es el que inyecta corriente en la tierra, por lo tanto se emplearán las coordenadas primadas para este electrodo

Coordenadas del electrodo 2

$xp := 3$ Coordenada x del electrodo (m)

$yp := 3$ Coordenada y del electrodo (m)

Coordenadas para el contrapeso:

$y := 3$ Coordenada y del electrodo (m)

$z := -0.5 + r$ Coordenada z del electrodo (m)

$z = -0.494$

$$R12 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot \text{long1} \cdot \text{long2}} \int_d^c \int_{-g}^a f_{\text{Green22}}(x, y, z, xp, yp, zp) dzp dx$$

$R12 = 6.313$ Resistencia mutua R12 ()

$R21 := R12$

9 Construcción de la matriz resistencia y cálculo de la matriz conductancia:

$$R_m := \begin{pmatrix} R11 & R12 & R13 \\ R21 & R22 & R23 \\ R31 & R32 & R33 \end{pmatrix}$$

Matriz resistencia

$$R_m = \begin{pmatrix} 30.518 & 6.313 & 2.541 \\ 6.313 & 54.576 & 4.535 \\ 2.541 & 4.535 & 27.126 \end{pmatrix}$$

Se calcula la inversa de la matriz resistencia:

$$G_m := R_m^{-1}$$

$$G_m = \begin{pmatrix} 0.034 & -3.692 \times 10^{-3} & -2.543 \times 10^{-3} \\ -3.692 \times 10^{-3} & 0.019 & -2.828 \times 10^{-3} \\ -2.543 \times 10^{-3} & -2.828 \times 10^{-3} & 0.038 \end{pmatrix} \quad \text{Matriz conductancia (S)}$$

10 Cálculo de la resistencia de puesta a tierra

Se suman todos los elementos de la matriz conductancia

$$G_{\text{total}} := \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 G_{m_{i,j}}$$

$$G_{\text{total}} = 0.072 \quad (\text{S})$$

Resistencia del sistema de puesta a tierra:

$$R_{\text{tierra}} := \frac{1}{G_{\text{total}}}$$

$$R_{\text{tierra}} = 13.855 \quad (\text{ohm})$$

11 Cálculo del Ground Potential Rise, si la máxima corriente de la malla es de 600A

$$I_{\text{tierra}} := 600 \quad (\text{A})$$

Tensión que adquiere el sistema de puesta a tierra (Ground Potential Rise) GPR

$$GPR := R_{\text{tierra}} \cdot I_{\text{tierra}}$$

$$GPR = 8.313 \times 10^3 \quad (\text{V})$$

12 Calculo de las curvas equipotenciales si la máxima corriente de la malla es de 600A

Corriente que drena a tierra cada electrodo

$$I_{elec} := Gm \begin{pmatrix} GPR \\ GPR \\ GPR \end{pmatrix}$$

$$I_{elec} = \begin{pmatrix} 228.672 \\ 103.621 \\ 267.707 \end{pmatrix} \text{ (A)}$$

$$I_1 := I_{elec}_0$$

$$I_1 = 228.672$$

$$I_2 := I_{elec}_1$$

$$I_2 = 103.621$$

$$I_3 := I_{elec}_2$$

$$I_3 = 267.707$$

Se verifica que la suma de las corrientes debe ser de 600A

$$I_1 + I_2 + I_3 = 600$$

Potencial en la superficie del suelo debido al electrodo No 1:

Coordenadas del electrodo:

$$yp1 := 3$$

$$zp1 := -0.5$$

$$c = 9$$

$$d = 3$$

$$V1(x,y) := \frac{I_1}{\sigma_2 \cdot \text{longl}} \cdot \int_d^c f_{Green22}(x,y,0, xp, yp1, zp1) dxp$$

Potencial en el suelo debido al electrodo No 2:

Coordenadas del electrodo:

$$xp2 := 3$$

$$yp2 := 3$$

$$V2(x,y) := \frac{I2}{\sigma2 \cdot \text{long2}} \cdot \int_{-g}^a f\text{Green22}(x,y,0,xp2,yp2,zp) dzp$$

Potencial en el suelo debido al electrodo No 3:

Coordenadas del electrodo:

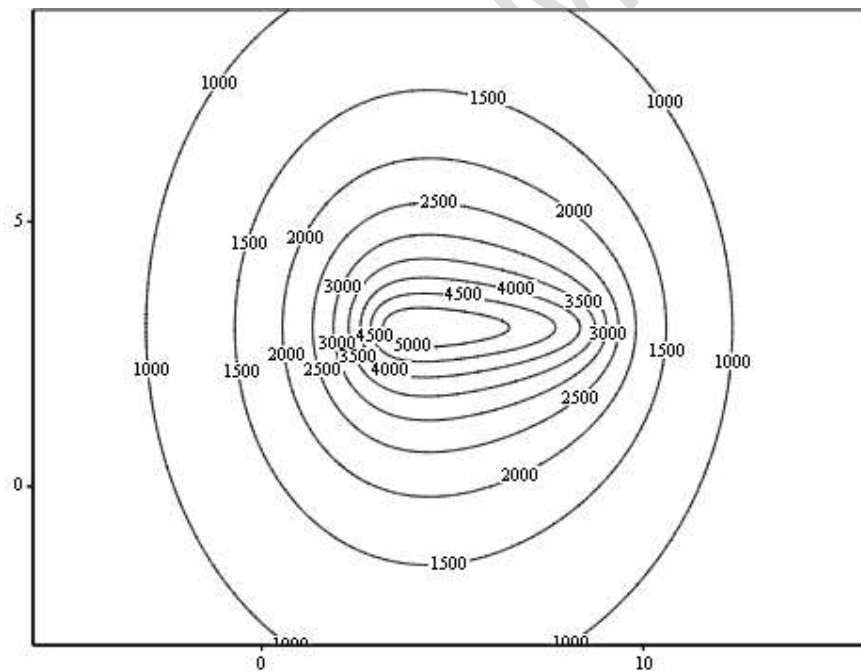
$$xp3 := 3$$

$$yp3 := 3$$

$$V3(x,y) := \frac{I3}{(\sigma2 + \sigma3) \cdot \text{long3}} \cdot \int_b^{-g} f\text{Green23}(x,y,0,xp3,yp3,zp) dzp$$

Potencial del suelo

$$Vsuelo(x,y) := V1(x,y) + V2(x,y) + V3(x,y)$$



V_{suelo}

Fig. A3 Líneas equipotenciales en la superficie del suelo

B Anexo B

Malla de puesta a tierra constituida por cuatro contrapesos y que forman un rectángulo.

La Figura B1 muestra una malla de puesta a tierra, formada por cuatro contrapesos, todos enterrados a una misma profundidad e igual a 0.75 m.

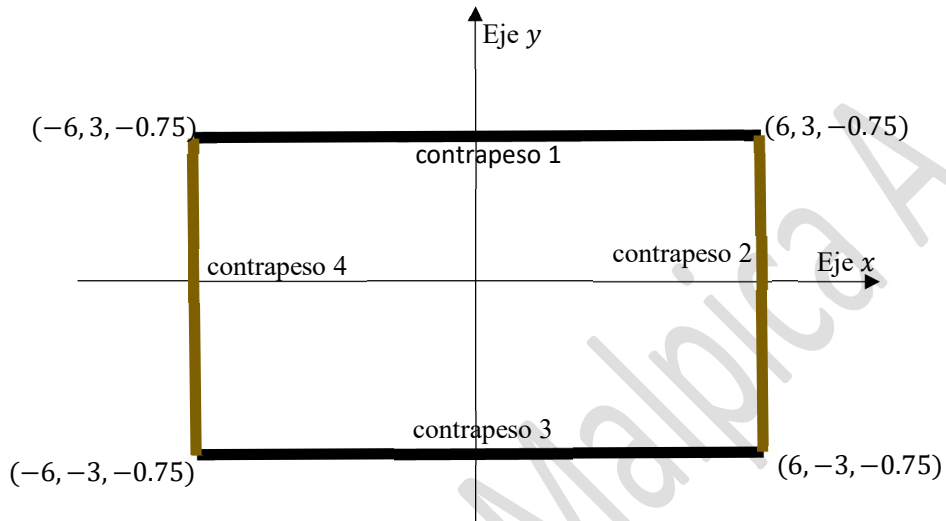


Fig B1 Sistema de puesta a tierra formado por cuatro contrapesos. Vista en planta.

En la Figura B1, también se muestran las coordenadas de los puntos extremos de los electrodos, y todos tienen un radio de 6,00 mm.

En cuanto al suelo, la resistividad de la primera capa es de $60 (\Omega m)$, con un espesor de 3.50 (m), y la resistividad de la segunda capa es de $110 (\Omega m)$.

A continuación se presenta el cálculo de la resistencia de puesta a tierra, el aumento del potencial del suelo GPR para una corriente máxima de malla de 1 kA y por último se presentan las líneas equipotenciales en la superficie del suelo.

Malla compuesta por cuatro electrodos o contrapesos enterrados en la primera capa del suelo, formando un rectángulo.

1 - Características del suelo y coeficiente de reflexión.

Nota. Se considera el primer estrato es el aire o la atmósfera

$\rho_2 := 60$ Resistividad de la primera capa del suelo (ohm m)

$\rho_3 := 110$ Resistividad de la segunda capa (ohm m)

$\sigma_2 := \frac{1}{\rho_2}$ Conductividad de la primera capa del suelo (S/m)

$\sigma_3 := \frac{1}{\rho_3}$ Conductividad segunda capa del suelo (S/m)

$g := 3.5$ Espesor de la primera capa (m)

$n := 40$ Numero de imágenes a considerar en el cálculo

$\Gamma_{32} := \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_2 + \sigma_3}$

$\Gamma_{32} = 0.294$ Coeficientes de reflexión

$\Gamma_{23} := -\Gamma_{32}$

2 -Función de Green para un suelo formado por dos capas.

Función de Green para calcular el potencial de un punto situado en la primera capa del suelo si la fuente se encuentra también en la primera capa:

$$f_{\text{Green22}}(x, y, z, x_p, y_p, z_p) := \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p+2 \cdot k \cdot g)^2}} \right] \dots \\ & + \sum_{k=0}^n \left[\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z+z_p-2 \cdot k \cdot g)^2}} \right] \dots \\ & + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z+z_p+2 \cdot k \cdot g)^2}} \right] \dots \\ & + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\Gamma_{32}^k}{\sqrt{(x-x_p)^2 + (y-y_p)^2 + (z-z_p-2 \cdot k \cdot g)^2}} \right] \dots \end{aligned} \right]$$

Nota : Como todos los electrodos se encuentran en la primera capa del suelo, solamente se necesita la función de Green anterior para realizar los cálculos.

3. Resistencia propia del contrapeso 1

Coordenadas del contrapeso.

$r := 0.006$ Radio del electrodo (m).
 $h1 := 0.75$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado (m).
 $zp1 := -h1$ Coordenada z del electrodo (m).
 $yp1 := 3$ Coordenada y del electrodo (m).
 $a := 6$ Límite de integración de las variables x y xp (m)
 $b := -6$ Límites de integración de las variables x y xp (m)

$y1 := yp1$ Coordenada y de la superficie del electrodo (m).
 $y1 = 3$
 $z1 := zp1 + r$ Coordenadas z de la superficie del electrodo (m).
 $long1 := a - b$ Longitud del electrodo (m)
 $long1 = 12$

$$R11 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot long1^2} \int_b^a \int_b^a fGreen22(x, y1, z1, xp, yp1, zp1) dxp dx$$

$R11 = 8.153$ (ohm)

4. Resistencia propia del contrapeso 2

Coordenadas del contrapeso

$r_{aa} := 0.006$ Radio del electrodo (m).
 $h2 := 0.75$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado (m).
 $zp2 := -h2$ Coordenada z del electrodo (m).
 $xp2 := 6$ Coordenada x del electrodo (m).
 $c := 3$ Límite de integración de las variables y y yp (m)
 $d := -3$ Límites de integración de las variables y y yp (m)
 $x2 := xp2$ Coordenada x de la superficie del electrodo (m).
 $z2 := zp2 + r$ Coordenadas z de la superficie del electrodo (m).
 $long2 := c - d$ Longitud del electrodo (m)
 $long2 = 6$

$$R22 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot long2^2} \cdot \int_d^c \int_d^c fGreen22(x2, y, z2, xp2, yp, zp2) \, dy \, dy$$

$$R22 = 13.526 \quad (\text{ohm})$$

5. Resistencia propia del contrapeso 3

Coordenadas del contrapeso.

$r_{aa} := 0.006$ Radio del electrodo (m).
 $h3 := 0.75$ Profundidad a la cual se encuentra enterrado (m).
 $zp3 := -h3$ Coordenada z del electrodo (m).
 $yp3 := -3$ Coordenada y del electrodo (m).
 $a := 6$ Límite de integración de las variables x y xp (m)
 $b := -6$ Límite de integración de las variables x y xp (m)
 $y3 := yp3$ Coordenada y de la superficie del electrodo (m).
 $y3 = -3$
 $z3 := zp3 + r$ Coordenadas z de la superficie del electrodo (m).
 $long3 := a - b$ Longitud del electrodo (m)
 $long3 = 12$

$$R33 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot long3^2} \cdot \int_b^a \int_b^a fGreen22(x, y3, z3, xp, yp3, zp3) \, dx \, dx$$

$$R33 = 8.153 \quad (\text{ohm})$$

6. Resistencia propia del contrapeso 4

Coordenadas del contrapeso.

$r := 0.006$	Radio del electrodo (m).
$h4 := 0.75$	Profundidad a la cual se encuentra enterrado (m).
$zp4 := -h4$	Coordenada z del electrodo (m).
$xp4 := -6$	Coordenada x del electrodo (m).
$c := 3$	Límite de integración de las variables y y yp (m)
$d := -3$	Límites de integración de las variables y y yp (m)
$x4 := xp4$	Coordenada x de la superficie del electrodo (m).
$x4 = -6$	
$z4 := zp4 + r$	Coordenadas z de la superficie del electrodo (m).
$long4 := c - d$	Longitud del electrodo (m)
$long4 = 6$	

$$R44 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot long4^2} \int_d^c \int_d^c fGreen22(x4, y, z4, xp4, yp, zp4) dyp dy$$

$$R44 = 13.526 \quad (\text{ohm})$$

7. Resistencia mutua entre los contrapesos 1 y 3.

$$R13 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot long1 \cdot long3} \int_b^a \int_b^a fGreen22(x, y3, z3, xp, yp1, zp1) dxp dx$$

$$R13 = 1.982 \quad (\text{ohm})$$

$$R31 := R13$$

8. Resistencia mutua entre los contrapesos 2 y 4.

$$R24 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot long2 \cdot long4} \int_d^c \int_d^c fGreen22(x2, y, z2, xp4, yp, zp4) dyp dy$$

$$R24 = 1.291 \quad (\text{ohm})$$

$$R42 := R24$$

9. Resistencia mutua entre los contrapesos 1 y 2.

$$R12 := \frac{1}{\sigma_2 \cdot long1 \cdot long2} \int_d^c \int_b^a fGreen22(x2, y, z2, xp, yp1, zp1) dxp dy$$

$$R12 = 2.481 \quad (\text{ohm})$$

$$R21 := R12$$

10. Resistencia mutua para el resto de los electrodos.

Por la simetría del problema (ver la Fig. B1).

$$R_{32} := R_{12}$$

$$R_{23} := R_{12}$$

$$R_{34} := R_{12}$$

$$R_{43} := R_{12}$$

$$R_{41} := R_{12}$$

$$R_{14} := R_{12}$$

11. Construcción de la matriz resistencia y cálculo de la matriz conductancia.

Se forma la matriz resistencia

$$\text{Res} := \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{pmatrix}$$
$$\text{Res} = \begin{pmatrix} 8.153 & 2.481 & 1.982 & 2.481 \\ 2.481 & 13.526 & 2.481 & 1.291 \\ 1.982 & 2.481 & 8.153 & 2.481 \\ 2.481 & 1.291 & 2.481 & 13.526 \end{pmatrix} \quad (\text{ohm})$$

Se invierte la matriz resistencia para obtener la matriz Conductancia:

$$\text{Gtierra} := \text{Res}^{-1}$$
$$\text{Gtierra} = \begin{pmatrix} 0.14 & -0.02 & -0.022 & -0.02 \\ -0.02 & 0.081 & -0.02 & -5.037 \times 10^{-4} \\ -0.022 & -0.02 & 0.14 & -0.02 \\ -0.02 & -5.037 \times 10^{-4} & -0.02 & 0.081 \end{pmatrix} \quad (\text{S})$$

12. Cálculo de la resistencia de puesta a tierra.

Se suman todos los elementos de la matriz conductancia:

$$G_{\text{suma}} := \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 G_{\text{tierra}, i, j}$$

Se obtiene la resistencia de puesta a tierra:

$$R_{\text{tierra}} := \frac{1}{G_{\text{suma}}}$$

$$R_{\text{tierra}} = 4.177 \quad (\text{ohm})$$

13. Cálculo del aumento del potencial de tierra GPR, para una corriente máxima de malla de 1 kA.

$$GPR := R_{\text{tierra}} \cdot 1000$$

$$GPR = 4.177 \times 10^3 \quad (\text{V})$$

14. Cálculo de las líneas equipotenciales en la superficie del suelo para una corriente máxima de malla de 1kA.

Se calcula la corriente que drena cada electrodo con la matriz conductancia:

$$I := G_{\text{tierra}} \begin{pmatrix} GPR \\ GPR \\ GPR \\ GPR \end{pmatrix}$$
$$I = \begin{pmatrix} 327.879 \\ 172.121 \\ 327.879 \\ 172.121 \end{pmatrix} \quad (\text{A})$$

$$I_1 := I_0$$

Corriente en los electrodos:

$$I_1 = 327.879 \text{ (A)}$$

$$I_2 := I_1$$

$$I_2 = 172.121 \text{ (A)}$$

$$I_3 := I_2$$

$$I_3 = 327.879 \text{ (A)}$$

$$I_4 := I_3$$

$$I_4 = 172.121 \text{ (A)}$$

Se suman todas las corrientes de los electrodos para verificar que es 1kA :

$$i_{tierra} := \sum_{b=0}^3 I_b$$

$$i_{tierra} = 1 \times 10^3 \text{ (A)}$$

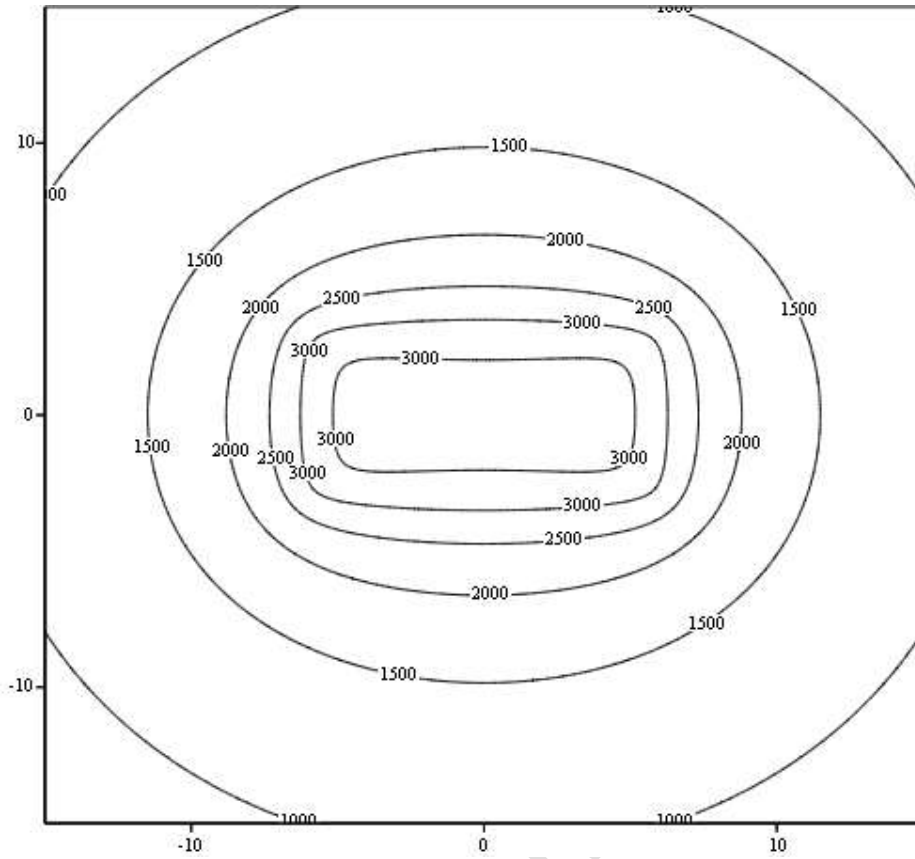
$$V_1(x, y) := \frac{I_1}{\sigma_2 \cdot \text{long}_1} \cdot \int_b^a f_{\text{Green22}}(x, y, 0, x_p, y_p1, z_p1) dx_p \quad \text{Potencial para el primer electrodo}$$

$$V_2(x, y) := \frac{I_2}{\sigma_2 \cdot \text{long}_2} \cdot \int_d^c f_{\text{Green22}}(x, y, 0, x_p2, y_p, z_p2) dy_p \quad \text{Potencial para el segundo electrodo}$$

$$V_3(x, y) := \frac{I_3}{\sigma_2 \cdot \text{long}_3} \cdot \int_b^a f_{\text{Green22}}(x, y, 0, x_p, y_p3, z_p3) dx_p \quad \text{Potencial para el tercer electrodo}$$

$$V_4(x, y) := \frac{I_4}{\sigma_2 \cdot \text{long}_4} \cdot \int_d^c f_{\text{Green22}}(x, y, 0, x_p4, y_p, z_p4) dy_p \quad \text{Potencial para el cuarto electrodo}$$

$$V_{\text{suelo}}(x, y) := V_1(x, y) + V_2(x, y) + V_3(x, y) + V_4(x, y)$$



Vsuelo

Fig B2 Líneas equipotenciales en la superficie del suelo

Napoleon

Napoleón Malpica A.