

# SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

Caracterización del suelo por dos estratos  
Método Schlumberger – Wenner

Napoleón Malpica Albert

Marzo 2022

## Contenido

Caracterización del suelo por dos estratos.....	1
Método Schlumberger – Wenner.....	1
1. Introducción.....	3
2. Medición de la resistividad del suelo por el método de Wenner.....	5
3. Medición de la resistividad del suelo por el método de Schlumberger.....	9
4. Deducción de la fórmula de la resistividad aparente, para un suelo formado por dos capas, empleando el método de Wenner o de Schlumberger.....	12
5. Caracterización del suelo por dos estratos siguiendo la metodología Schlumberger – Wenner.....	15
ANEXO.....	22
Referencias.....	27

Napoleón Malpica A.

# SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

## CARACTERIZACIÓN DEL SUELO POR DOS ESTRATOS MÉTODO SCHLUMBERGER - WENNER

### 1. Introducción.

Cuando se realiza el diseño de un sistema de puesta a tierra, uno de los datos que se requiere para el cálculo es la resistividad del suelo, estas notas están dedicados a la medición de la resistividad del suelo, utilizando para ello los conocidos métodos de Wenner y de Schlumberger y que se usan para caracterizar el suelo como si estuviera formado por estratos o por capas.

Siempre que se realiza una medición de la resistividad del suelo, es fundamental contar con alguna normativa relacionado con el tema, como por ejemplo, la recomendación *ANSI/IEEE Std 81 2012 IEEE Guide for Measuring Earth Resistivity, Ground Impedance, and Earth Surface Potential of a Ground System*, que es lectura obligada para aquel que realiza una medición de resistividad y que en buena medida dicha norma sirvió de referencia en la elaboración de este documento.

Muchas fórmulas que se encuentran publicadas para calcular la resistencia a puesta a tierra en electrodos fueron desarrolladas asumiendo que el suelo es homogéneo, como por ejemplo, todas las fórmulas de resistencia que se encuentran en el documento *Sistemas de puesta a tierra. Parte 2.*, que fueron obtenidas asumiendo esta condición; pero es bien sabido que el suelo nunca es un medio homogéneo; entonces, para estos casos, donde se asume un suelo homogéneo, lo ideal es obtener de la medición de resistividad, la resistividad promedio del suelo. La recomendación ANSI/IEEE Std80 IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding dedica también un capítulo a la medición de la resistividad del suelo y como se debe hacer para obtener la resistividad promedio del mismo, pero el cálculo de la resistividad promedio no es tratado en estas líneas y se recomienda consultar la norma en cuestión.

También existen métodos de cálculo de resistencias de electrodos de puestas a tierra o software para el cálculo de resistencia de puesta a tierra, donde se asume que el suelo ya no es un medio homogéneo, sino más bien formado por estratos o capas, lo más común es asumir que el suelo está formado por dos estratos; entonces, de la medición de resistividad se deben obtener los valores de resistividad de ambos estratos y el espesor del estrato que se encuentra más superficial.

En referencia a los métodos tanto de Wenner como el de Schlumberger, para medir la resistividad, para ambos métodos se requiere el uso de cuatro electrodos y de un puente a cuatro hilos para medir resistencia, diseñado especialmente para medir resistencias de puestas a tierra y que en algunos países lo conocen como *telurómetro*. De ambos métodos el más utilizado es el de Wenner, porque es el método que dispone de más información y es el que documenta la recomendación *ANSI/IEEE Std 81* para caracterizar el suelo por dos estratos, aunque tiene el inconveniente que pierde sensibilidad al ir aumentando la separación de los electrodos, cosa que no ocurre con el método de Schlumberger.

La recomendación ANSI/IEEE 81, en su anexo B, presenta un algoritmo para obtener la resistividad en suelos biestratificados, utilizando únicamente el método de Wenner, el algoritmo está elaborado con base a minimizar una función error, denominado *steepest descent* o también conocido como el método de *máxima pendiente*, este método se explica también en estos apuntes.

Como agregado de estos apuntes, se plantea un método para caracterizar el suelo por dos estratos, pero aplicando ambos métodos de medición, el de Wenner y el de Schlumberger; por ejemplo: si los electrodos se encuentran cercanos, se puede aplicar el método de Wenner, pero a medida que la separación entre electrodos se va incrementando y se hace inoperativo el método de Wenner, entonces se recurre al método de Schlumberger. Para obtener los valores de las resistividades de ambas capas, se emplea una variante al método que presenta la recomendación IEEE 81, en el Anexo B, para así poder utilizar las ecuaciones de Schlumberger.

Napoleón Malpica A.

## 2. Medición de la resistividad del suelo por el método de Wenner.

La Figura 1 muestra 4 esferas metálicas, utilizadas como electrodos, todas enterradas en el suelo a una profundidad  $b$ , que por lo general es del orden de los 30 cm o menos. Las esferas se encuentran alineadas siguiendo una línea recta y se encuentran separadas entre sí a una misma distancia  $d$ . También se muestra en la figura una fuente de corriente que se encuentra conectada en los electrodos que se encuentran situados en los extremos (#1 y #4) y un voltímetro que se encuentra conectado en los electrodos del centro (#2 y #3). Si la tensión  $V$  que indica el voltímetro se divide entre la corriente  $i$  inyectada por la fuente, se obtiene un valor de resistencia, que es lo que indicaría un ohmímetro de cuatro hilos si en lugar de la fuente y el voltímetro, tuviéramos conectados el instrumento en cuestión. Se asume, en este caso, que por los bornes  $P1$  y  $P2$  la corriente es despreciable.

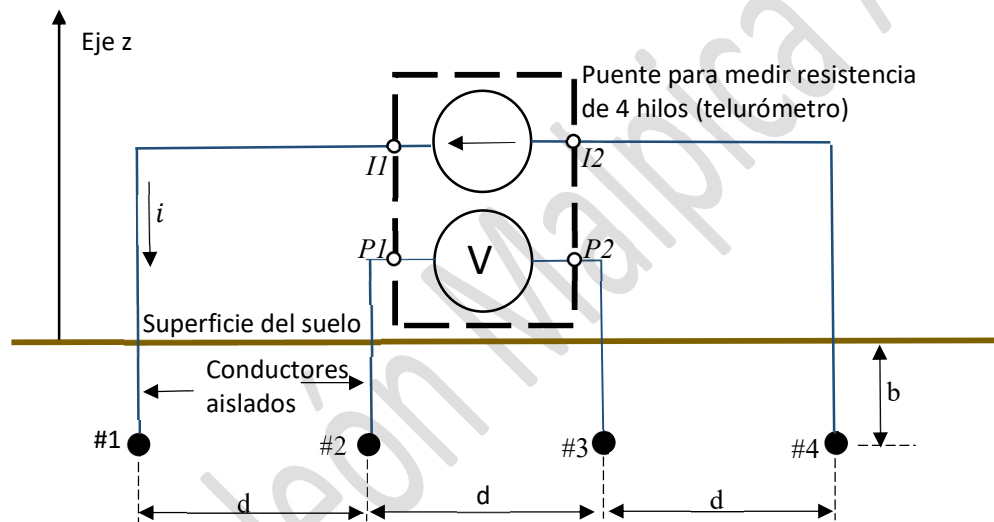


Fig. 1 Método de Wenner para medir la resistividad aparente del suelo

La medición de resistividad consiste en inyectar una corriente en la tierra, a través de los electrodos que se encuentran en los extremos, esta inyección de corriente genera un potencial en cualquier punto del suelo y luego se mide la diferencia de potencial que adquieren los dos electrodos situados en el centro. La razón entre la tensión medida y la corriente inyectada, corresponde a un valor de resistencia y de este valor de resistencia se deduce la resistividad del suelo, aplicando teoría de campo.

Para calcular la resistividad con el arreglo de electrodos mostrados en la Figura 1, Wenner asumió un régimen estacionario del campo electromagnético y al ser estacionario, el campo eléctrico es del tipo gradiente, por lo tanto, son las cargas eléctricas las que generan el campo eléctrico en el suelo.

De acuerdo con la Figura 1, los electrodos #1 y #4 que se encuentran inyectando corriente a la tierra, a su vez, son los que deben estar cargados, ya que existe una relación entre la carga que tiene un electrodo y la corriente que el mismo inyecta a la tierra, relación que se demuestra en el Capítulo 2 de *Sistemas de Puesta a Tierra. Primera Parte*:

$$\frac{i}{\sigma} = \frac{q}{\epsilon} \quad (2-1)$$

donde:

$q$  - Es la carga del electrodo.

$i$  - Es la corriente que drena a la tierra el electrodo.

$\sigma$  - Es la conductividad de la tierra.

$\varepsilon$  - Es la permitividad de la tierra.

Con la ecuación anterior, podemos saber cuánta carga tienen los electrodos #1 y #4 si conocemos la magnitud de la corriente que se inyecta a la tierra.

Pero si tenemos un electrodo esférico cargado, podemos saber el potencial en cualquier punto del medio, si el medio es homogéneo, con la siguiente ecuación:

$$V = \frac{1}{4\pi r} \frac{q}{\varepsilon} \quad (2-2)$$

donde  $r$  es la distancia entre el electrodo que se encuentra cargado y el punto donde se quiere calcular el potencial.

Al hacer uso de (2-1) en la ecuación anterior se obtiene lo siguiente:

$$V = \frac{1}{4\pi r} \frac{i}{\sigma} \quad (2-3)$$

La ecuación anterior permite calcular el potencial producido por un electrodo esférico que inyecta corriente en la tierra; sin embargo, la ecuación anterior solamente es válida si el medio es infinito y homogéneo, cuando en la realidad, de acuerdo a la Figura 1, no todo es homogéneo ya que una mitad del medio es aire y la otra mitad es tierra.

Para resolver el problema que el medio no es homogéneo, se aplica el método de las imágenes como se puede observar en la Figura 2, donde la superficie del suelo se comporta como si fuera un espejo y todo el medio ahora está compuesto sólo de tierra.

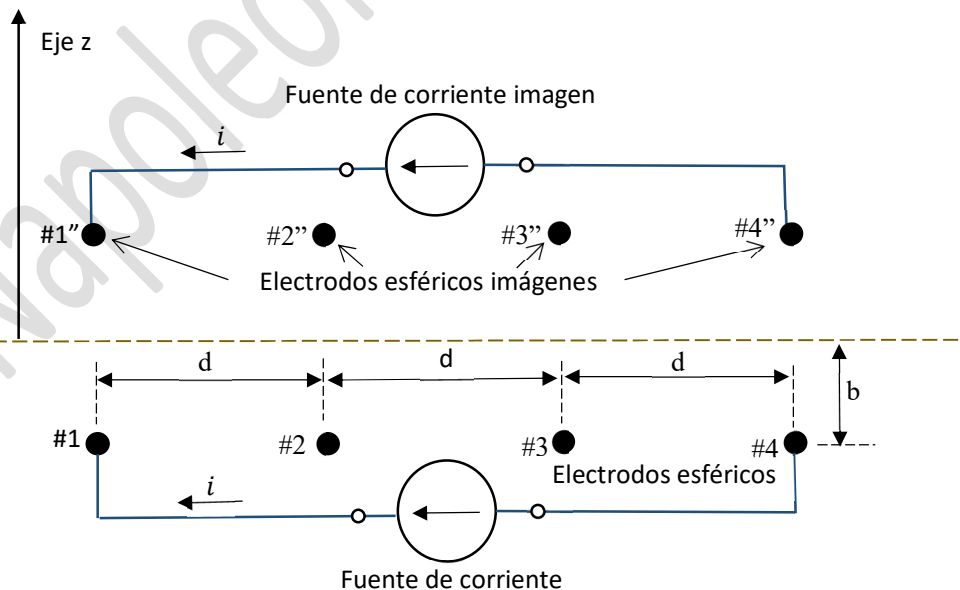


Fig. 2 Método de las imágenes aplicada a la configuración de electrodos según Wenner.

Referente a la Figura 2, al aplicar el método de las imágenes, son en total cuatro electrodos que inyectan corriente en la tierra; por lo tanto, los cuatro electrodos contribuyen con el potencial del suelo.

De acuerdo con el párrafo anterior, el potencial del electrodo #2 vendrá dado por la contribución del potencial que aporta cada uno de los electrodos que inyectan corriente en la tierra:

$$V_2 = V_{2\ 1} + V_{2\ 4} + V_{2\ 1''} + V_{2\ 4''} \quad (2-4)$$

donde:

$$V_{2\ 1} = \frac{i}{4\pi\sigma} \frac{1}{d} \quad (2-5)$$

$$V_{2\ 4} = \frac{-i}{4\pi\sigma} \frac{1}{2d} \quad (2-6)$$

$$V_{2\ 1''} = \frac{i}{4\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{d^2+(2b)^2}} \quad (2-7)$$

$$V_{2\ 4''} = \frac{-i}{4\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{(2d)^2+(2b)^2}} \quad (2-8)$$

Al sustituir (2-5)(2-6)(2-7)(2-8) en (2-4):

$$V_2 = \frac{i}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{2d} + \frac{1}{\sqrt{d^2+(2b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2d)^2+(2b)^2}} \right) \quad (2-9)$$

Y al calcular el potencial que tiene el electrodo #3:

$$V_3 = V_{3\ 1} + V_{3\ 4} + V_{3\ 1''} + V_{3\ 4''} \quad (2-10)$$

donde:

$$V_{3\ 4} = \frac{-i}{4\pi\sigma} \frac{1}{d} \quad (2-11)$$

$$V_{3\ 1} = \frac{i}{4\pi\sigma} \frac{1}{2d} \quad (2-12)$$

$$V_{3\ 4''} = \frac{-i}{4\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{d^2+(2b)^2}} \quad (2-13)$$

$$V_{3\ 1''} = \frac{i}{4\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{(2d)^2+(2b)^2}} \quad (2-14)$$

Al sustituir (2-11)(2-12)(2-13)(2-14) en (2-10):

$$V_3 = \frac{i}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{2d} - \frac{1}{d} - \frac{1}{\sqrt{d^2+(2b)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2d)^2+(2b)^2}} \right) \quad (2-15)$$

Con las ecuaciones (2-9) y (2-15) se obtiene la diferencia de potencial que existe entre los electrodos #2 y #3:

$$V = V_2 - V_3 = \frac{2i}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{2d} + \frac{1}{\sqrt{d^2+(2b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2d)^2+(2b)^2}} \right) \quad (2-16)$$

De donde se obtiene la resistencia  $R$  medida por el puente de 4 hilos y que se muestra en la Figura 1:

$$R = \frac{\rho_a}{2\pi} \left( \frac{1}{2d} + \frac{1}{\sqrt{d^2+(2b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2d)^2+(2b)^2}} \right) \quad (2-17)$$

donde  $\rho_a$  es el inverso de la conductividad  $\sigma$  y se le conoce como resistividad aparente del suelo.

De la ecuación anterior, al despejar la resistividad aparente, se obtiene la fórmula de resistividad desarrollada por Wenner:

$$\rho_a(d, b) = 4 \pi d R \left( \frac{1}{1 + \frac{2d}{\sqrt{(d)^2 + (2b)^2}} + \frac{2d}{\sqrt{(2d)^2 + (2b)^2}}} \right) \quad (2-18)$$

A pesar de que la fórmula de Wenner fue desarrollada para electrodos esféricos, la misma es completamente válida si en lugar de las esferas se emplean electrodos cilíndricos como las barras; los mismos fabricantes de puentes para medir resistencia de puesta a tierra y resistividad del suelo, suministran junto con el instrumento, un conjunto de barras metálicas para ser usadas como electrodos, con longitudes que no superan por lo general los 40 cm.

En cuanto a la fórmula de Wenner dada por (2-18), nótese que la resistividad aparente es función de la separación de los electrodos, aquí es importante realizar los siguientes comentarios: Si el suelo fuera homogéneo, la resistividad aparente obtenida con la fórmula sería una constante e independiente de la separación  $d$  que tengan los electrodos. Por otra parte, si durante la medición se observa variaciones de la resistividad aparente en función de la separación  $d$  de los electrodos, entonces este comportamiento nos indica que el suelo no es homogéneo y esto es lo que ocurre normalmente durante una medición de resistividad.

Uno de los problemas que tiene el método de Wenner, es que pierde sensibilidad a medida que aumenta la separación entre los electrodos, o en otras palabras, a medida que aumenta la separación, la resistencia medida tiende a disminuir hasta llegar al punto que el instrumento deja de medir por operar fuera de su rango de medición o porque la resistencia medida tiene una magnitud del mismo orden del error del instrumento.

Por ejemplo, si  $d \gg b$  entonces la ecuación (2-17) se aproxima a la siguiente:

$$R \approx \frac{\rho_a}{2 \pi d} \quad (2-19)$$

Nótese de la ecuación anterior, que a medida que aumenta la separación  $d$  de los electrodos, la resistencia medida disminuye, hasta darse la condición que la resistencia que se quiere medir sale del rango de medición del instrumento utilizado. Otra forma de explicar lo que sucede es que, si la separación entre los electrodos es muy grande, los electrodos #2 y #3 se salen de la zona de influencia<sup>1</sup> de los electrodos #1 y #4 y por lo tanto los potenciales son despreciables.

Cuando esto ocurre, es preferible utilizar el método de Schlumberger, método que se explica a continuación.

---

<sup>1</sup> Ver el capítulo 6 de "Sistemas de puesta a tierra. Parte 1", para la definición de la zona de influencia de un electrodo.



### 3. Medición de la resistividad del suelo por el método de Schlumberger.

El método de Schlumberger, para medir resistividad del suelo, es muy parecido al método de Wenner, la diferencia entre los métodos está en el hecho en que, en el método de Schlumberger, la separación entre los electrodos no son todas iguales, cosa que si sucede con el método de Wenner. La Figura 3 muestra una configuración para el método de Schlumberger donde la separación  $c$  entre los electrodos #1 y #2 es diferente a la separación  $d$  que existe entre los electrodos #2 y #3, como se muestra en la figura.

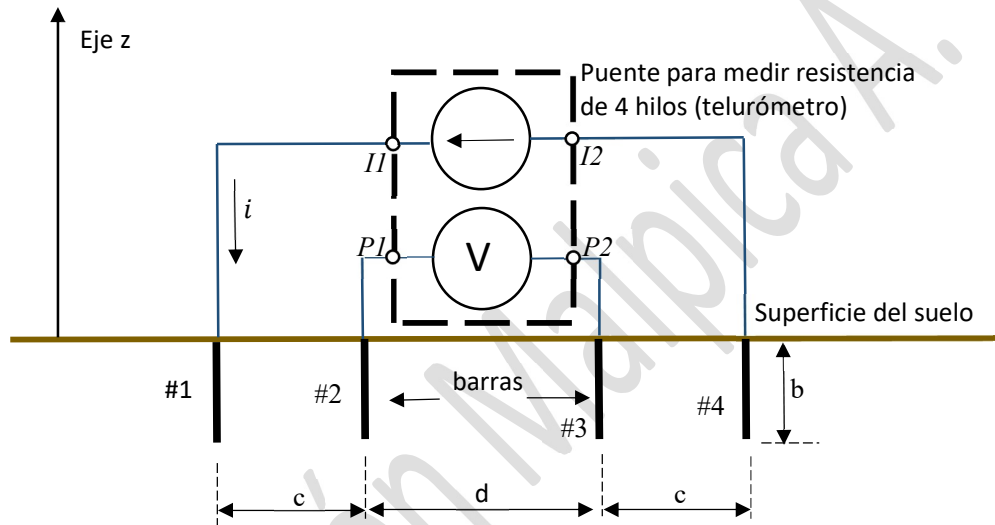


Fig. 3 Método de Schlumberger para medir resistividad del suelo.

Para calcular el potencial que adquiere el electrodo #2 de la Figura 3, se puede aplicar la misma metodología empleada para el método de Wenner, el potencial del electrodo vendrá dado por la contribución del potencial que aporta cada uno de los electrodos que inyectan corriente en la tierra, incluyendo los electrodos imágenes:

$$V_2 = V_{21} + V_{24} + V_{21''} + V_{24''} \quad (3-1)$$

donde:

$$V_{21} = \frac{i}{4\pi\sigma} \frac{1}{c} \quad (3-2)$$

$$V_{24} = \frac{-i}{4\pi\sigma} \frac{1}{(c+d)} \quad (3-3)$$

$$V_{21''} = \frac{i}{4\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{(c)^2+(2b)^2}} \quad (3-4)$$

$$V_{24''} = \frac{-i}{4\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{(c+d)^2+(2b)^2}} \quad (3-5)$$

Al sustituir (3-2)(3-3)(3-4)(3-5) en (3-1):

$$V_2 = \frac{i}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c+d} + \frac{1}{\sqrt{c^2+(2b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(c+d)^2+(2b)^2}} \right) \quad (3-6)$$

Y al calcular el potencial que tiene el electrodo #3:

$$V_3 = V_{31} + V_{34} + V_{31''} + V_{34''} \quad (3-7)$$

donde:

$$V_{34} = \frac{-i}{4\pi\sigma} \frac{1}{c} \quad (3-8)$$

$$V_{31} = \frac{i}{4\pi\sigma} \frac{1}{c+d} \quad (3-9)$$

$$V_{34''} = \frac{-i}{4\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{c^2+(2b)^2}} \quad (3-10)$$

$$V_{31''} = \frac{i}{4\pi\sigma} \frac{1}{\sqrt{(c+d)^2+(2b)^2}} \quad (3-11)$$

Al sustituir (3-8)(3-9)(3-10)(3-11) en (3-7) se obtiene el potencial del electrodo #3:

$$V_3 = \frac{i}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{c+d} - \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{c^2+(2b)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(c+d)^2+(2b)^2}} \right) \quad (3-12)$$

Con las ecuaciones (2-9) y (2-15) se obtiene la diferencia de potencial que existe entre los electrodos #2 y #3:

$$V = V_2 - V_3 = \frac{2i}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c+d} + \frac{1}{\sqrt{c^2+(2b)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(c+d)^2+(2b)^2}} \right) \quad (3-13)$$

Si  $c \gg b$  y  $d \gg b$  la ecuación anterior se aproxima a la siguiente:

$$V = V_2 - V_3 = \frac{i}{\pi\sigma} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c+d} \right) \quad (3-14)$$

De la ecuación anterior se extrae el valor de la resistencia  $R$  que mediría un puente:

$$R = \frac{\rho_a}{\pi} \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{c+d} \right) \quad (3-15)$$

donde  $\rho_a$  es la resistividad aparente de la tierra y es el inverso de la conductividad.

Al despejar la resistividad aparente de la ecuación anterior, se obtiene la expresión de Schlumberger para calcular la resistividad:

$$\rho_a(c, d) = \frac{\pi c (c+d)}{d} R \quad (3-16)$$

El método de Schlumberger tiene la ventaja que permite realizar la medición para grandes separaciones de los electrodos de corriente, sin tener el problema que el instrumento para medir resistencia deje de medir o que la resistencia medida esté en el mismo orden de magnitud del error del instrumento. En cuanto a la Figura 3, si se asume que la distancia  $d$  es grande y si la distancia  $c$  es pequeña de manera tal que el electrodo #2 quede dentro de la zona de influencia del electrodo #1 y el electrodo #3 quede bajo la zona de influencia del electrodo #4, entonces siempre habrá una diferencia de potencial entre los electrodos #2 y #3 y por lo tanto, el instrumento medirá un cierto valor de resistencia.

Otra forma de visualizar el beneficio que tiene el método de Schlumberger es mediante la ecuación (3-15), si se selecciona un valor fijo de  $c$  y que no sea muy grande, de manera que los electrodos de potencial queden dentro de la zona de influencia de los electrodos de corriente, tal como se indica en el párrafo anterior, y si  $d \gg c$ , entonces la ecuación (3-15) tiende a lo siguiente:

$$R \approx \frac{\rho_a}{\pi c} \quad (3-17)$$

Nótese que la resistencia medida ya no depende de la distancia  $d$  de los electrodos de potencial que se encuentran muy separados.

Napoleón Malpica A.

#### 4. Deducción de la fórmula de la resistividad aparente, para un suelo formado por dos capas, empleando el método de Wenner o de Schlumberger.

En la Figura 4 se muestra un suelo formado por dos estratos y 4 electrodos que se encuentran separados a las distancias  $c$  y  $d$  indicadas en la propia figura y cuya configuración corresponde al método de medición de Schlumberger. Si la distancia entre electrodos se cumple que  $c = d$ , entonces el método de medición corresponde al de Wenner.

Para obtener la fórmula de resistividad aparente, asúmase que por los electrodos extremos se hace circular una corriente  $i$  y luego se calcula la diferencia de potencial que tienen los electrodos ubicados en el centro.

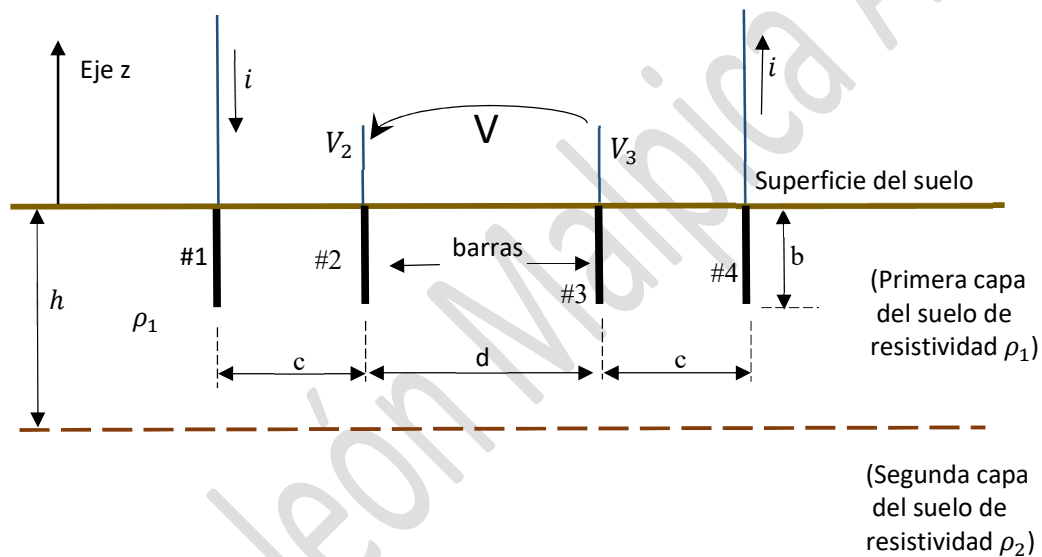


Fig. 4 Método de los cuatro puntos para medir resistividad del suelo formado por dos estratos

Si la longitud  $b$  de los electrodos es pequeña en comparación con la separación  $d$  entre los electrodos, el campo generado por los electrodos es equivalente al campo generado por electrodos semiesféricos, enterrados a ras del suelo, como se muestran en la Figura 5.

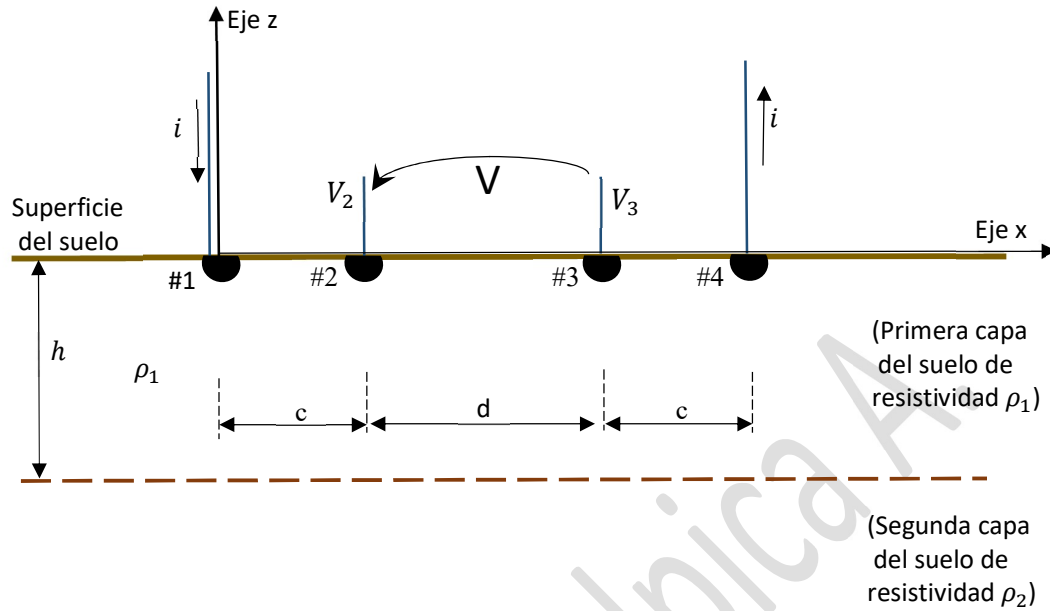


Fig. 5 Método de los cuatro puntos, para medir la resistividad del suelo, empleando electrodos semiesféricos.

Para calcular el potencial en cualquier punto de la tierra que se encuentre situado en la primera capa del suelo, se requiere la apropiada función de Green<sup>2</sup> y que se transcribe a continuación:

$$fGreen(x, y, z, x', y', z') \approx \frac{1}{4\pi} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'+2k h)^2}} + \dots \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z'-2k h)^2}} + \dots \right) \right] \quad (4-1)$$

donde:

$x, y, z$  - son las coordenadas del electrodo semiesférico donde se quiere calcular el potencial.

$x', y', z'$  -son las coordenadas del electrodo semiesférico que inyecta corriente

Con la función de Green, se obtiene el potencial:

$$V(x, y, z) \approx fGreen(x, y, z, x', y', z') \rho_1 i \quad (4-2)$$

donde:

$\rho_1$  - Es la resistividad de la primera capa.

$i$  - Es la corriente inyectada a través del electrodo.

$h$  - Es el espesor de la primera capa.

$\rho_2$  - Es la resistividad de la segunda capa.

$\Gamma$  - Es el coeficiente de reflexión.

<sup>2</sup> Consultar el documento "Sistemas de puesta a tierra. Parte 4", para las funciones de Green en suelo biestratificado.

$$\Gamma = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (4-3)$$

Si todos los electrodos tienen coordenadas  $z = z' = 0$ , por encontrarse a ras del suelo y si  $y = y' = 0$ , entonces el potencial que tiene el electrodo #2, al emplear la ecuación (4-1), vendrá dada por:

$$V_2 = \frac{\rho_1 i}{4\pi} \left[ \frac{2}{c} - \frac{2}{c+d} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c)^2 + (2k h)^2}} - \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c+d)^2 + (2k h)^2}} \right) \right] \quad (4-4)$$

Y en cuanto al electrodo #3, su potencial vendrá dado por la siguiente ecuación:

$$V_3 = \frac{\rho_1 i}{4\pi} \left[ \frac{2}{c+d} - \frac{2}{c} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c+d)^2 + (2k h)^2}} - \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c)^2 + (2k h)^2}} \right) \right] \quad (4-5)$$

Entonces, la diferencia de potencial que existe entre los electrodos #2 y #3 se obtiene con la diferencia de las ecuaciones anteriores:

$$V = V_2 - V_3 = \frac{\rho_1 i}{4\pi} \left[ \frac{4}{c} - \frac{4}{c+d} + 8 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c)^2 + (2k h)^2}} - \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c+d)^2 + (2k h)^2}} \right) \right] \quad (4-6)$$

Si a la diferencia de potencial  $V$  obtenida en la ecuación anterior, se divide entre la corriente inyectada por los electrodos que se encuentran situados en los extremos, se obtendría el valor de la resistencia que indicaría un óhmetro de cuatro hilos empleado en la medición:

$$R = \frac{V}{i} = \frac{\rho_1}{\pi} \left[ \frac{1}{c} - \frac{1}{c+d} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c)^2 + (2k h)^2}} - \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c+d)^2 + (2k h)^2}} \right) \right] \quad (4-7)$$

Al igualar la ecuación anterior con la ecuación (3-15), se obtiene la expresión para la resistividad aparente, para suelo formado por dos estratos, empleando la formulación de Schlumberger:

$$\rho_{a\_Schlumb}(c, d) = \frac{c(c+d)\rho_1}{d} \left[ \frac{1}{c} - \frac{1}{c+d} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c)^2 + (2k h)^2}} - \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c+d)^2 + (2k h)^2}} \right) \right] \quad (4-8)$$

En el caso que se quiera caracterizar el suelo por dos estratos, empleando el método de Wenner, entonces las distancias  $c$  y  $d$  deben ser iguales, al hacer la igualdad en la ecuación anterior se obtiene el resultando siguiente:

$$\rho_{a\_Wenner}(d) = \rho_1 \left[ 1 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(1)^2 + \left(\frac{2k h}{c}\right)^2}} - \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(4)^2 + \left(\frac{2k h}{c}\right)^2}} \right) \right] \quad (4-9)$$

que es la misma ecuación que publica la recomendación IEEE Std. 81, en el anexo B, para el método de Wenner.

Entonces se puede utilizar la ecuación (4-8) para obtener la resistividad aparente de acuerdo al método de Wenner, con la siguiente relación:

$$\rho_{a\_Schlumb}(d, d) = \rho_{a\_Wenner}(d) \quad (4-10)$$

## 5. Caracterización del suelo por dos estratos siguiendo la metodología Schlumberger – Wenner.

Cuando se realiza una medición de resistividad del suelo, el procedimiento de medición normalizado consiste en realizar un conjunto de mediciones, con el arreglo mostrado en la Figura 1 si el método es el de Wenner o el arreglo de la Figura 3 si el método es el de Schlumberger, y a diversas separaciones de los electrodos. Si la separación entre los electrodos es pequeña, se asume que la corriente que drenan los electrodos #1 y #4 atraviesa principalmente la capa más superficial del suelo, entonces la resistividad aparente medida debe contener información de esta capa superficial, y a medida que se separan los electrodos, se asume que la corriente comienza a penetrar las capas más profundas del suelo; por lo tanto, las mediciones comienzan a mostrar la dependencia de la resistividad de estas capas que se encuentran a mayor profundidad, es por este motivo que se requiere realizar mediciones de resistividad aparente variando la separación de los electrodos.

El método consiste en obtener los parámetros del suelo como la resistividad de la primera capa, su espesor y la resistividad de la segunda capa, a partir de una serie de mediciones de resistencia, realizadas con un puente de 4 hilos, empleando los arreglos que se muestran en la Figuras 1 y 3. En el caso de utilizar el método de Wenner, (Fig. 1) la resistividad aparente se obtiene con la ecuación (2-18) y en el caso de emplear el método de Schlumberger (Fig. 3), la resistividad aparente se obtiene con la ecuación (3-16). Todas las mediciones para caracterizar el suelo pueden ser hechas utilizando un solo método, como el de Wenner o el de Schlumberger, pero también es posible caracterizar el suelo de un conjunto de mediciones donde se utilizan ambos métodos.

Para explicar el método, asúmase que se dispone de un conjunto de  $n$  mediciones de resistividad realizadas en un terreno:  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n$  que fueron realizadas a diferentes separaciones de los electrodos:  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_i, \dots, c_n$  y  $d_1, d_2, d, \dots, d_i, \dots, d_n$  respectivamente. En los casos en que  $c_i = d_i$ , se asume que el método de medición empleado fue el de Wenner dado por (2-18) y para los otros caso donde  $c_i \neq d_i$  se asume que se empleó el método de Schlumberger dado por (3-16).

Con los datos medidos, el procedimiento consiste en definir una función error  $\psi$  dada por la siguiente ecuación:

$$\psi(\rho_1, \rho_2, h) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i} \right)^2 \quad (5-1)$$

donde:

- $\rho_i$  -Es la resistividad aparente medida durante la medición  $i$ .
- $\rho_a(c_i, d_i)$  -Es la resistividad aparente calculada, obtenida con (4-8), y evaluada empleando las separaciones  $c$  y  $d$  de la medición  $i$ .
- $n$  -Es el número de mediciones realizadas.

El método consiste en determinar los valores de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $h$  que minimicen la función error, usando el método de *steepest descent* o de máxima pendiente, este método trabaja con el gradiente de la función error, si el gradiente tiende a cero, es porque se está obteniendo un mínimo de la función.

El gradiente de una función es un vector, cuyas componentes están compuestas por las derivadas parciales de la función, de manera que las componentes del gradiente de la función error  $\psi$  (o sus derivadas parciales), son las siguientes:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi = -2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \rho_a \right) \quad (5-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \psi = -2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \rho_a \right) \quad (5-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \psi = -2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial h} \rho_a \right) \quad (5-4)$$

donde las derivadas parciales de la resistividad aparente vienen dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \rho_a = 1 + 2 \frac{c+d}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \left( 1 - \frac{k(1-\Gamma^2)}{2\Gamma} \right) \left( \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c)^2+(2k h)^2}} - \frac{\Gamma^k}{\sqrt{(c+d)^2+(2k h)^2}} \right) \right] \quad (5-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \rho_a = \frac{c(c+d)\rho_1}{d \rho_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ (1 - \Gamma^2) \left( \frac{k \Gamma^{k-1}}{\sqrt{(c)^2+(2k h)^2}} - \frac{k \Gamma^{k-1}}{\sqrt{(c+d)^2+(2k h)^2}} \right) \right] \quad (5-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \rho_a = \frac{8 h c (c+d)\rho_1}{d} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{k^2 \Gamma^k}{\sqrt{(c+d)^2+(2k h)^2}} - \frac{k^2 \Gamma^k}{\sqrt{(c)^2+(2k h)^2}} \right] \quad (5-7)$$

y donde  $\Gamma$  viene dado por:

$$\Gamma = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (5-8)$$

Con el gradiente de la función, dada por las derivadas parciales (5-2)(5-3) y (5-4), se calcula el módulo del gradiente de la función error, al converger los resultados, el módulo de  $\nabla\psi$  debe ser muy pequeño y menor a un cierto valor  $Tol$  :

$$|\nabla\psi| = \sqrt{\left( \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \rho_2} \psi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial h} \psi \right)^2} \quad (5-9)$$

Y la magnitud de los incrementos que se deben realizar en cada iteración a las variables que se quieren calcular ( $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $h$ ) van a depender de la magnitud de las derivadas, si estamos cerca de la solución, las derivadas van disminuyendo en magnitud y de igual forma se van disminuyendo los incrementos de las variables. A continuación se presentan las formulas relacionadas con los incrementos:

$$\Delta\rho_1 = -\frac{0.005|\rho_1|}{|\nabla\psi|} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi \quad (5-10)$$

$$\Delta\rho_2 = -\frac{0.005|\rho_2|}{|\nabla\psi|} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \psi \quad (5-11)$$

$$\Delta h = -\frac{0.005|h|}{|\nabla\psi|} \frac{\partial}{\partial h} \psi \quad (5-12)$$

Algoritmo de cálculo:

- Se asignan los valores iniciales de  $\rho_1^0$ ,  $\rho_2^0$ ,  $h^0$  y la tolerancia  $Tol$ .
- Se calculan las derivadas parciales dadas por (5-2)(5-3) y (5-4) y el módulo del gradiente de la función error, dado por (5-9).
- Con las derivadas parciales se calculan los incrementos  $\Delta\rho_1$ ,  $\Delta\rho_2$  y  $\Delta h$  dados por (5-10) (5-11) y (5-12)
- Se obtienen los nuevos valores de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $h$  con las siguientes ecuaciones:

$$\rho_1^i = \rho_1^{i-1} + \Delta\rho_1 \quad (5-13)$$



$$\rho_2^i = \rho_2^{i-1} + \Delta\rho_2 \quad (5-14)$$

$$h^i = h^{i-1} + \Delta h \quad (5-15)$$

e) Se toma una decisión en el proceso con base a las siguientes condiciones:

Si  $|\nabla\psi| > Tol$  entonces se regresa al paso b.

Si  $|\nabla\psi| < Tol$  entonces se para el proceso y  $\rho_1^i, \rho_2^i$  y  $h^i$  es la solución.

- **Ejercicio 1**

Obtener los parámetros de un suelo formado por dos estratos, a partir de los valores de resistencia, medidos con un puente de 4 hilos y empleando el método de Wenner. En la tabla 1 se muestran los datos obtenidos de la medición de la resistividad aparente del suelo realizados con el método de Wenner.

Tabla 1 Mediciones de resistencia y de resistividad, empleando el método de Wenner.

Medición	Separación entre electrodos (m). $c = d$	Resistencia medida por el puente ( $\Omega$ )	Resistividad aparente medida $\rho$ , obtenida con (2-18) ( $\Omega$ m)
1	0.5	13.79	57
2	1	12.59	87
3	2	7.52	97
4	4.4	3.98	113
5	6.5	2.98	122
6	9	2.52	143
7	15.5	1.85	180
8	22	1.52	210
9	27.5	1.32	228
10	33.5	1.13	238
11	39.5	1.02	253
12	46	0.90	260

Nota: Para la medición se emplearon 4 barra enterradas a 25 cm. ( $b = 0.25$  (m))

a) Se asignan los valores iniciales y la tolerancia:

$$\rho_1^0 = 50 \quad (5-16)$$

$$\rho_2^0 = 300 \quad (5-17)$$

$$h^0 = 6 \quad (5-18)$$

$$Tol = 0.00001 \quad (5-19)$$

Los valores semillas o iniciales pueden tener cualquier valor, pero si están cerca de la solución, la convergencia será más rápida.

b) Con los datos de  $\rho_1, \rho_2$  y  $h$ , se calculan las derivadas parciales dadas por (5-2)(5-3) y (5-4) y el módulo del gradiente de la función error:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \rho_a \right) = -0.06 \quad (5-20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \psi = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \rho_a \right) = -4.06 \cdot 10^{-3} \quad (5-21)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \psi = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial h} \rho_a \right) = -0.322 \quad (5-22)$$

$$|\nabla \psi| = \sqrt{\left( \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \rho_2} \psi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial h} \psi \right)^2} = 0.327 \quad (5-23)$$

donde  $\rho_a$  viene dada por (4-8) y  $\rho_i$  son los valores medidos de resistividad tomados de la Tabla 1.

- c) Con las derivadas parciales se calculan los incrementos  $\Delta \rho_1$ ,  $\Delta \rho_2$  y  $\Delta h$  dados por (5-10) (5-11) y (5-12):

$$\Delta \rho_1 = -\frac{0.005|\rho_1|}{|\nabla \psi|} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi = 0.046 \quad (5-24)$$

$$\Delta \rho_2 = -\frac{0.005|\rho_2|}{|\nabla \psi|} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \psi = 0.019 \quad (5-25)$$

$$\Delta h = -\frac{0.005|h|}{|\nabla \psi|} \frac{\partial}{\partial h} \psi = 0.029 \quad (5-26)$$

- d) Con los incrementos, se obtienen los nuevos valores de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $h$ :

$$\rho_1^1 = \rho_1^0 + \Delta \rho_1 = 50.046 \quad (5-27)$$

$$\rho_2^1 = \rho_2^0 + \Delta \rho_2 = 300.019 \quad (5-28)$$

$$h^1 = h^0 + \Delta h = 6.029 \quad (5-29)$$

- e) Se compara el módulo del gradiente de la función error con la tolerancia, como en este caso  $|\nabla \psi| > Tol$ , entonces se regresa al paso b), el proceso continúa hasta lograr que  $|\nabla \psi| < Tol$ .

La convergencia de este método iterativo no es rápida pero casi siempre se obtiene un resultado. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$\rho_1 = 70.3 \text{ } (\Omega \text{ m}) \quad (5-30)$$

$$\rho_2 = 269.8 \text{ } (\Omega \text{ m}) \quad (5-31)$$

$$h = 3.16 \text{ } (m) \quad (5-32)$$

$$\psi(\rho_1, \rho_2, h) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i} \right)^2 = 0.39 \quad (5-33)$$

La función  $\psi(\rho_1, \rho_2, h)$  permite evaluar el error de la regresión no lineal efectuada, sirve para comparar el método steepest descent con otros métodos numéricos de regresión o para ajustar el valor de  $Tol$ .

Con los resultados obtenidos, se puede graficar la resistividad aparente utilizando la ecuación (4-8), en la Figura 6 se compara la resistividad aparente, obtenida con la ecuación en cuestión y los datos de la resistividad medida de la Tabla 1.

Nótese que en este ejercicio, donde se empleó el método de medición de Wenner, el cálculo fue realizado empleando las ecuaciones de Schlumberger teniendo el cuidado que  $c = d$ .

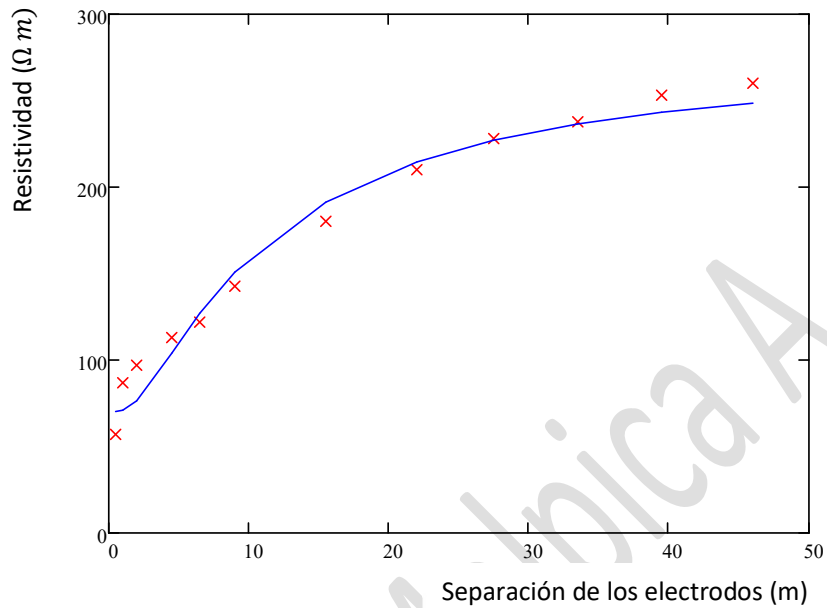


Fig. 6 Comparación de la resistividad aparente obtenida con la ecuación (4-8) con los valores medidos.

• **Ejercicio 2**

Se dispone de un conjunto de mediciones de resistividad realizadas en un terreno, en las mediciones se utilizaron tanto el método de Wenner como el de Schlumberger, se requiere obtener el modelo del terreno para dos estratos.

Tabla 2 Datos medidos mediciones de resistividad aparente del terreno

Medición	Método	Separación c (m)	Separación d (m)	Resistencia medida (Ω)	Resistividad medida (Ω m)
1	Wenner	0.5	0.5	5.67	17.81
2	Wenner	1	1	2.96	18.60
3	Wenner	2	2	1.90	23.88
4	Wenner	3	3	1.29	24.32
5	Wenner	4	4	1.08	27.14
6	Wenner	5	5	0.85	26.70
7	Schlumberger	5	6	0.93	26.78
8	Schlumberger	5	7	0.98	26.39
9	Schlumberger	5	8	1.05	26.80
10	Schlumberger	5	9	1.08	26.39
11	Schlumberger	5	10	1.17	27.57

Nota: la resistividad medida fue obtenida con la ecuación (3-16)

La Tabla 2 muestra los datos obtenidos de las mediciones donde se emplearon ambos métodos, nótese que en el caso de aplicar la configuración Schlumberger, la separación  $c$  se mantuvo constante y en 5 (m), con la finalidad que los electrodos de tensión quedaran dentro de la zona de influencia del electrodo de corriente que se encuentre más cercano al mismo y de esta forma los valores de resistencia medidos no sean tan bajos, pero en ningún momento debe ser considerado como una norma. Pero el método permite que la distancia  $c$  puede variar y tomar cualquier valor.

- a) Se asignan los valores iniciales y la tolerancia:

$$\rho_1^0 = 15 \quad (5-34)$$

$$\rho_2^0 = 30 \quad (5-35)$$

$$h^0 = 2 \quad (5-36)$$

$$Tol = 0.00001 \quad (5-37)$$

- b) Con los datos de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $h$ , se calculan las derivadas parciales dadas por (5-2)(5-3) y (5-4) y el módulo del gradiente de la función error:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \rho_a \right) = -0.152 \quad (5-38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_2} \psi = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \rho_a \right) = -0.038 \quad (5-39)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \psi = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\rho_i - \rho_a(c_i, d_i)}{\rho_i^2} \frac{\partial}{\partial h} \rho_a \right) = 0.38 \quad (5-40)$$

$$|\nabla \psi| = \sqrt{\left( \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \rho_2} \psi \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial h} \psi \right)^2} = 0.411 \quad (5-41)$$

donde  $\rho_a$  viene dada por (4-8) y  $\rho_i$  son los valores medidos de resistividad tomados de la Tabla 2.

- c) Con las derivadas parciales se calculan los incrementos  $\Delta \rho_1$ ,  $\Delta \rho_2$  y  $\Delta h$  dados por (5-10) (5-11) y (5-12):

$$\Delta \rho_1 = -\frac{0.005|\rho_1|}{|\nabla \psi|} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi = 0.028 \quad (5-42)$$

$$\Delta \rho_2 = -\frac{0.005|\rho_2|}{|\nabla \psi|} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \psi = 0.014 \quad (5-43)$$

$$\Delta h = -\frac{0.005|h|}{|\nabla \psi|} \frac{\partial}{\partial h} \psi = -9.24 \cdot 10^{-3} \quad (5-44)$$

- d) Con los incrementos, se obtienen los nuevos valores de  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $h$ :

$$\rho_1^1 = \rho_1^0 + \Delta \rho_1 = 15.028 \quad (5-45)$$

$$\rho_2^1 = \rho_2^0 + \Delta \rho_2 = 30.014 \quad (5-46)$$

$$h^1 = h^0 + \Delta h = 1.991 \quad (5-47)$$

- e) Se compara el módulo del gradiente de la función error con la tolerancia, como en este caso  $|\nabla \psi| > Tol$ , entonces se regresa al paso b), el proceso continúa hasta lograr que  $|\nabla \psi| < Tol$ .

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$\rho_1 = 16.96 (\Omega m) \quad (5-48)$$

$$\rho_2 = 28.54 (\Omega m) \quad (5-49)$$

$$h = 0.846 (m) \quad (5-50)$$

$$\psi(\rho_1, \rho_2, h) = 7.154 \cdot 10^{-3} \quad (5-51)$$

En la figura 7 se compara la expresión (4-8), utilizada para calcular la resistividad aparente y evaluada con los resultados obtenidos, con los valores de resistividad aparente medidos dados en la Tabla 2.

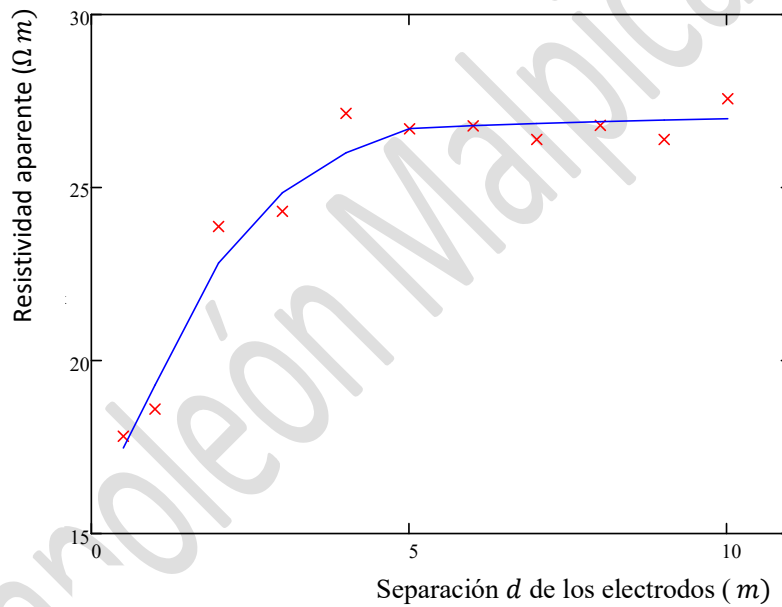


Fig. 7 Comparación de la resistividad aparente, dada por (4-8), con los valores de resistividad aparente medidos.

## ANEXO

### Caracterización del suelo por dos estratos utilizando Math Cad

#### Problema 2

#### Método steepest descent o método de máxima pendiente para caracterizar el suelo por dos estratos.

#### Método Wenner- Schlumberger

Se desea obtener de la medición de resistividad aparente, los datos referentes a la resistividad  $\rho_1$  de la primera capa del suelo, la resistividad de la segunda capa  $\rho_2$  y el espesor  $h$  de la primera capa del suelo.

$nmed := 11$       Número de mediciones realizadas

Datos medidos:

$j := 1..nmed$

$c_j :=$		$d_j :=$		$Rm_j :=$
0.5		0.5		5.67
1		1		2.96
2		2		1.90
3		3		1.29
4	Separación c y d de los electrodos (m)	4		1.08
5		5		0.85
5		6		0.93
5		7		0.98
5		8		1.05
5		9		1.08
5		10		1.17

Resistencia medida ( $\Omega$ )

$reflex := 20$       Es el número de reflexiones de onda a considerar en los cálculos

Resistividad aparente medida obtenida con (3-16):

$$\rho_{am_j} := \frac{\pi \cdot c_j \cdot (c_j + d_j)}{d_j} \cdot Rm_j \quad (3-16)$$

$\rho_{am_j} =$

17.813
18.598
23.876
24.316
27.143
26.704
26.782
26.389
26.802
26.389
27.567

Vector resistividad aparente en (ohm m)

Resistividad aparente para el método de Schlumberger:

$$\rho_a(c, d, \rho_1, \rho_2, h) := \frac{\rho_1 \cdot c \cdot (c + d)}{d} \cdot \left[ \frac{d}{c \cdot (c + d)} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\text{reflex}} \left[ \frac{\left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^i}{\sqrt{c^2 + (2 \cdot i \cdot h)^2}} - \frac{\left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^i}{\sqrt{(c + d)^2 + (2 \cdot i \cdot h)^2}} \right] \right]$$

Derivada parcial de la resistividad aparente con respecto a  $\rho_1$ :

$$d\rho_a d\rho_1(c, d, \rho_1, \rho_2, h) := 1 + 2 \cdot \frac{c + d}{d} \cdot \sum_{i=1}^{\text{reflex}} \left[ 1 - \frac{\left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^2}{2 \cdot \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}} \right] \cdot \left[ \frac{\left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^i}{\sqrt{c^2 + (2 \cdot i \cdot h)^2}} \dots \right. \\ \left. + (-1) \cdot \frac{\left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^i}{\sqrt{(c + d)^2 + (2 \cdot i \cdot h)^2}} \right]$$

Derivada parcial de la resistividad aparente con respecto a  $\rho_2$ :

$$d\rho_a d\rho_2(c, d, \rho_1, \rho_2, h) := \frac{\rho_1 \cdot c \cdot (c + d)}{d \cdot \rho_2} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^2 \right] \cdot \sum_{i=1}^{\text{reflex}} \left[ \frac{\left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^{i-1} \cdot i}{\sqrt{c^2 + (2 \cdot i \cdot h)^2}} \dots \right. \\ \left. + (-1) \cdot \frac{\left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \right)^{i-1} \cdot i}{\sqrt{(c + d)^2 + (2 \cdot i \cdot h)^2}} \right]$$

Derivada parcial de la resistividad aparente con respecto al espesor h de la primera capa:

$$d\rho_{adh}(c,d,\rho_1,\rho_2,h) := \frac{8 \cdot h \cdot \rho_1 \cdot c \cdot (c+d)}{d} \cdot \left[ \sum_{i=1}^{\text{reflex}} \left[ \frac{i^2 \cdot \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right)^i}{\sqrt{[(c+d)^2 + (2 \cdot i \cdot h)^2]^3}} - \frac{i^2 \cdot \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}\right)^i}{\sqrt{[c^2 + (2 \cdot i \cdot h)^2]^3}} \right] \right]$$

Valores semillas o iniciales:

$\rho_1 := 10$  Resistividad de la primera capa (ohm m)

$\rho_2 := 40$  Resistividad de la segunda capa (ohm m)

$h := 2$  Espesor de la primera capa (m)

Tol := 0.00001

Napoleón Malpica A.



Rutina de cálculo según el método de máxima pendiente:

```

X := | p1 ← ρ1
      p2 ← ρ2
      hh ← h
      ΔF ← 10
      moddF ← 1
      while |moddF| > Tol
      | dFdp1 ← -2 ∑k=1nmed [  $\frac{\rho a m_k - \rho a(c_k, d_k, p1, p2, hh)}{(\rho a m_k)^2} \cdot (d\rho ad\rho 1(c_k, d_k, p1, p2, hh))$  ]
        dFdp2 ← -2 ∑k=1nmed [  $\frac{\rho a m_k - \rho a(c_k, d_k, p1, p2, hh)}{(\rho a m_k)^2} \cdot (d\rho ad\rho 2(c_k, d_k, p1, p2, hh))$  ]
        dFdh ← -2 ∑k=1nmed [  $\frac{\rho a m_k - \rho a(c_k, d_k, p1, p2, hh)}{(\rho a m_k)^2} \cdot (d\rho adh(c_k, d_k, p1, p2, hh))$  ]
        moddF ← √(dFdp12 + dFdp22 + dFdh2)
        Δp1 ← 0
        Δp2 ← 0
        Δhh ← 0
        if moddF > 0
        | Δp1 ← -0.005 |p1| ·  $\frac{dFdp1}{moddF}$ 
          Δp2 ← -0.005 |p2| ·  $\frac{dFdp2}{moddF}$ 
          Δhh ← -0.005 |hh| ·  $\frac{dFdh}{moddF}$ 
        | p1 ← p1 + Δp1
          p2 ← p2 + Δp2
          hh ← hh + Δhh
      | X1 ← p1
        X2 ← p2
        X3 ← hh
        X4 ← moddF
        X5 ← ∑k=1nmed (  $\frac{\rho a m_k - \rho a(c_k, d_k, p1, p2, hh)}{\rho a m_k}$  )2
      | X
  
```

Resultados

$$\rho_1 := X_1$$

$\rho_1 = 16.955$  Resistividad primera capa (ohm m)

$$\rho_2 := X_2$$

$\rho_2 = 28.539$  Resistividad segunda capa (ohm m)

$$h := X_3$$

$h = 0.846$  Espesor de la primera capa (m)

$$\text{MóduloGradiente} := X_4$$

$\text{MóduloGradiente} = 1.351 \times 10^{-9}$  Valor del módulo del gradiente  $\psi$  obtenido

$$\text{Error} := X_5$$

El error se obtiene con (5-1)

$$\text{Error} = 7.154 \times 10^{-3}$$

Napoleón Malpica A.

## Referencias

Wenner, Frank, "A Method of Measuring Earth Resistivity", Bulletin of the Bureau of Standards, Volume 12, No. 4, pp. 469-478, May 1916

*ANSI/IEEE Std 81 2012 IEEE Guide for Measuring Earth Resistivity, Ground Impedance, and Earth Surface Potential of a Ground System*

*ANSI/IEEE Std 80 IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding.*

Malpica Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 1. (apuntes de la asignatura Sistemas de puesta a tierra, Universidad Central de Vzla.).

Malpica Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 2. (apuntes de la asignatura Sistemas de puesta a tierra, Universidad Central de Vzla.).

Napoleón Malpica A.