



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA.

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO.

Sincronización en autómatas celulares

Autor

JOSÉ GARCÍA

15 de julio de 2010

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el Br. José H. Garcia A. titulado: **Sincronización en autómatas celulares**, para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos **APROBADO** en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Dr. Alberto Bellorín

Dr. Arnaldo Donoso

Dr. Pedro García

Agradecimientos.

Ha sido un largo camino el que he recorrido, desde aquel momento hace 5 años cuando decidí embarcarme en esta aventura. El camino no fue fácil, hubo caídas, hubo momentos donde pensé no lo lograría, pero siempre hubo personas a mi lado, que no permitieron que me rindiera, que me brindaron su ayuda y su apoyo, en fin, personas sin las cuales no habría llegado hasta aquí.

Algunas han estado desde el principio, otras aparecieron mucho mas tardes y otras han estado conmigo aún antes de comenzar esta jornada, pero a cada una de ellas les guardo un cariño especial y una gratitud enorme independiente de la cronología.

Así pues agradezco:

A mi madre, quien me educo de la manera mas perfecta para ingresar en la vida universitaria y me dio su apoyo económico, emocional, moral e intelectual sin el cual jamas hubiera logrado ninguno de mis objetivos. A mi padre, quien vivió solo hasta mis 13, pero que me enseñó muchas lecciones de vida que contribuyeron enormemente en la formación de la persona que soy ahora. A mi hermanos Julio y Luis, con los que compartí muchas de mis alegrías y mis tristezas durante toda mi vida, ustedes en conjunto con mi madre son una de las razones por las cuales quise y logré llegar tan lejos.

A mis amigos, Maybemar Hernandez, Ángel Rincón, Jorge Salas, Rosmary Guerrero y Efraín Gatuzz, que conformamos lo que cariñosamente llamamos el sexteto, cada uno de ustedes contribuyo de mil y un maneras a llegar adonde estoy; las discusiones interminables con Jorge, las charlas de 2

horas con Maybe en el bus, las largas conversaciones en la escuela con Rosma, las noches de videojuegos y juegos de mesa con Efra y Angel, entre muchas otras cosas. Todos son momentos que siempre recordaré con mucho cariño, que me devolvían los ánimos perdidos y me permitían levantarme de nuevo al día siguiente para seguir afrontando retos.

A la profesora Carolina Bessega, que me introdujo al mundo de la investigación, al trabajo académico, a lo que espero será mi vida laboral a partir de ahora. Al profesor Pedro García, mi tutor, quien me ayudo a culminar el recorrido, con su asesoría y consejos pude terminar este trabajo incluso mas rápido de lo que pensaba. A dios, que me dió la energía, salud y fortaleza para seguir adelante.

Y por último, agradezco a una persona muy importante para mi en estos momentos, mi mejor amiga Andreina Esparragoza, quien llegó a mi vida a mitad del camino y dividió mi carrera en dos, antes y después de conocerla. Al revisar mis notas puedo ver, que después de conocerte, se dispararon todas hacia arriba, muestra innegable de que la felicidad es un combustible que te lleva a lograr metas que concebías imposible, y es que tu me hiciste y me sigues haciendo feliz hoy por hoy, eres mi combustible y una de las principales razones por la cual estoy aquí.

NO LO HABRIA LOGRADO SIN USTEDES.

GRACIAS A TODOS!!!

Resumen.

Los autómatas celulares son un sistema dinámico extendido, totalmente discreto, que se ha utilizado en los años recientes para modelar un sin número de problemas tales como: dinámicas de poblaciones, simulaciones sociales, modelado de reacciones químicas, dinámicas de espines, modelos de terremotos, etc. Y en muchos casos, han dado buenos resultados tanto cualitativos como cuantitativos.

Por otra parte, existe un fenómeno, que es de gran interés en múltiples campos denominado sincronización. La sincronización de manera muy básica puede ser definida como: El cambio en el comportamiento entre dos o mas entes, debido a una interacción débil entre ellos que conlleva a una dinámica coordinada de todo el sistema.

Este fenómeno ocurre con mucha frecuencia en la naturaleza; el reloj biológico que regula el comportamiento de nuestro cuerpo está sujeto a variaciones en la iluminación y temperatura, existen en la naturaleza poblaciones de insectos que emiten pulsos sonoros o lumínicos a una tasa común, las neuronas en el cerebro actúan en conjunto para generar una respuesta a un estímulo. Es decir es un fenómeno que trasciende las barreras de un campo específico para convertirse en un fenómeno de interés general.

En este trabajo se estudian esquemas de sincronización estocástica y se desarrolla un esquema de sincronización determinista aplicable a autómatas elementales caóticos y de comportamiento complejo. Para el desarrollo de este esquema, se utilizó una definición del Jacobiano Booleano para construir una función de acople, con la cual se logra sincronizar dos sistemas perturbando un conjunto pequeño de sitios.

Índice general

1. Introducción	1
2. Sistemas dinámicos	4
2.1. Definición	4
2.2. Generalidades sobre el comportamiento de los sistemas dinámicos	5
2.2.1. Estado estacionario de punto fijo	6
2.2.2. Estado estacionario periódico	6
2.2.3. Estado estacionario cuasiperiódico	7
2.2.4. Estado estacionario caótico	7
2.3. Sistemas dinámicos continuos:	7
2.4. Parcialmente discretos	8
2.5. Sistemas discretos. Autómatas Celulares	9
2.5.1. Definición y representación	9
2.5.2. Evolución de los automatas celulares	11
2.5.3. Notación del Wolfram y clasificación de las reglas de evolución	13
3. Sincronización perfecta en sistemas continuos y parcialmente discretos.	18
3.1. Definición	18
3.2. Sincronización en sistemas parcialmente discretos	19

3.3. Sincronización en sistemas continuos	20
4. Esquemas de sincronización en autómatas celulares	22
4.1. Sincronización por medio de un acople estocástico	23
4.2. Sincronización por medio de un acople determinista	30
5. Conclusiones	40
A. Jacobiano en sistemas continuos	41

Capítulo 1

Introducción

La complejidad de la naturaleza ha sido abordada desde muchos ángulos por la ciencia moderna. Una manera de estudiar la naturaleza, es mediante la creación de modelos que preservan solo las características fundamentales del sistema de estudio. Por otra parte en física, uno de los objetivos fundamentales es predecir el comportamiento de un sistema dado su estado inicial, es decir su evolución. Lo usual es considerar el tiempo, el espacio y las variables de estado como variables continuas y utilizar ecuaciones diferenciales parciales u ordinarias, para describir la evolución del sistema. Este esquema de estudio ha resultado fructífero en un sin número de aplicaciones, sobre todo en sistemas lineales. Cuando los sistemas son no lineales, el esquema de ecuaciones diferenciales presenta varios inconvenientes, dado que incluso sistemas con ecuaciones de evolución simples, como por ejemplo las ecuaciones de Lorenz[1], presentan comportamientos altamente complejos, esto sumado al hecho de que el principio de superposición no es aplicable, conlleva a que no existan métodos generales para resolver de forma exacta ecuaciones diferenciales no lineales, debido a ello hay que recurrir a su resolución mediante métodos alternativos[2].

Uno de los primeros enfoques para el estudio de sistemas no lineales,

fue la resolución de las ecuaciones diferenciales por medio de métodos numéricos. En general para resolver una ecuación diferencial numéricamente la misma se transforma en una ecuación en diferencias finitas[3], discreta tanto en tiempo como en espacio, con lo que se obtiene una ecuación recursiva que vincula el estado en el tiempo t con el estado en el tiempo $t + 1$. Las ecuaciones en diferencias son un caso particular de un tipo de sistemas dinámicos denominados mapas discretos[4].

Para resolver el problema utilizando ecuaciones en diferencias, se debe iterar el estado inicial t veces para obtener el estado en el tiempo t . Este proceso generalmente es llevado a cabo mediante el uso de ordenadores, sin embargo como las computadoras solo manejan variables racionales exactas, se acarrea siempre un error de redondeo, el cual para tiempos muy grandes puede generar falsos resultados, sobretodo en sistemas caóticos donde estos pequeños errores son amplificados exponencialmente[3].

En los últimos años se ha retomado el enfoque de Von Neumann[5, 6] donde el espacio, el tiempo y las variables de estado son variables discretas y finitas[7], es decir se plantea una visión discreta de la naturaleza. Esta nueva visión permite dos cosas; aprovechar de manera óptima el cálculo mediante computadoras y simplificar el modelado de los sistemas al pasar de ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas. Este tipo de sistemas totalmente discretos recibe el nombre de autómatas celulares.

Un caso de este tipo de sistema, son los autómatas celulares elementales o ECA por sus siglas en ingles[5]. Los ECA son los autómatas mas simples que presentan comportamientos no triviales, son autómatas de estados binarios cuya interacción local es de primeros vecinos y cuya evolución puede ser descrita por una regla local o global, dada mediante una tabla de verdad.

A pesar de su simplicidad estos sistemas pueden desarrollar dinámicas de diversos tipos: de punto fijo, periódicas, caótica y un cierto tipo de dinámica que aún no está bien clasificada en el ámbito de los sistemas dinámicos, conocida como dinámica compleja.

Por otra parte, existe un fenómeno que es de interés general para un gran número de disciplinas conocido como sincronización el cual en términos simples y sin entrar en ningún formalismo puede ser definido como el cambio en el comportamiento entre dos o mas entes, debido a una interacción débil entre ellos, que conlleva a una dinámica coordinada de todo el sistema[8].

La sincronización ocurre espontáneamente en muchos sistemas naturales: al bailar nuestros cuerpos se mueven al unisono al escuchar una melodía; nuestros brazos se coordinan con nuestras piernas para correr; colonias de murciélagos abandonan su cueva en grupos de cientos sin interferir entre ellos; etc[9]. En todos estos casos debe existir una interacción generalmente débil entre los constituyentes del sistema, no obstante, al aceptar la presencia de la misma surgen preguntas como ¿Que genera la interacción?, ¿Será local o global?, ¿Que tan intensa es? y muchas otras.

Mediante el uso de los autómatas celulares, se propone una serie de esquemas con la finalidad de encontrar respuestas a algunas de las preguntas anteriores. En particular, se desea encontrar qué características debe tener la interacción de acople, para que pueda ocurrir una sincronización perfecta. Los autómatas a utilizar serán los ECA que presentan comportamiento caótico llamados de CLASE III y aquellos que presentan comportamiento complejo, también llamados de CLASE IV.

Capítulo 2

Sistemas dinámicos

2.1. Definición

Considérese un sistema que puede ser descrito enteramente por las variables $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$. El vector

$$\mathbf{u} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \quad (2.1)$$

es denominado el estado del sistema. En mecánica clásica, por ejemplo, las componentes de \mathbf{u} son las coordenadas y momentos generalizados, que constituyen el estado mecánico del sistema.

$$\mathbf{u} = (q_1, p_1, \dots, q_n, p_n).$$

Cuando un sistema evoluciona en el tiempo, se le denomina dinámico. Una manera de describir esta evolución es mediante la formulación de Liouville, donde si \mathcal{E} es el conjunto de todos los estados posibles del sistema, entonces $\mathbf{u} \in \mathcal{E}$ evoluciona en el tiempo bajo la aplicación de un operador $\phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. Esto es:

$$\mathbf{u}(t') = \phi(\mathbf{u}(t)), \quad t' > t. \quad (2.2)$$

A (2.2) se le denomina ecuación de evolución y a este tipo de sistemas donde la evolución depende únicamente del tiempo, se les denomina localizados. No obstante, existen casos donde también se presenta una dependencia espacial, la cual denotaremos por la variable \mathbf{x} . A este tipo de sistemas se les denomina extendidos y su ecuación de evolución es:

$$\mathbf{u}(t') = \phi(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}), \quad t' > t.$$

De manera que un sistema dinámico en general presenta 4 componentes relevantes para describirlo, esto es el tiempo, el espacio, el estado y la función de evolución. Dependiendo de la naturaleza de estos elementos, los sistemas dinámicos pueden ser clasificados en:

- Sistemas dinámicos continuos.
- Sistemas dinámicos parcialmente discretos.
- Sistemas dinámicos discretos.

En lo que sigue se utilizará el triplete $(\mathbf{u}, \phi, \mathcal{E})$ para denotar cualquier sistema dinámico. El primer componente representa el vector de estados, el segundo la función de evolución y el tercero el espacio de todos los estados posibles.

2.2. Generalidades sobre el comportamiento de los sistemas dinámicos

La evolución de un sistema dinámico puede dividirse en dos etapas que en cierto momento se encuentran solapadas. La primera etapa ocurre en

los primeros momentos de la evolución, allí la dinámica del sistema depende fuertemente de las condiciones iniciales, en este caso se dice que el sistema se encuentra en estado transiente. Al transcurrir mucho tiempo el sistema evoluciona en términos de su comportamiento natural y se dice ahora que el sistema se encuentra en estado estacionario.

Una clasificación de los diversos tipos de estado estacionario que pueden alcanzar los sistemas dinámicos, los agrupa de acuerdo a si su estado asintótico es un estado estacionario de punto fijo, periódico, cuasiperiódico o caótico.

2.2.1. Estado estacionario de punto fijo

Se dice que el sistema adquiere una dinámica de punto fijo si cumple con la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_{\infty} = \text{cte.} \quad (2.3)$$

Al estado \mathbf{u}_{∞} se le denomina el punto de equilibrio del sistema.

2.2.2. Estado estacionario periódico

Se dice que el sistema adquiere una dinámica periódica si cumple con la condición

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{u}(t); \quad \forall t > t_0, \quad (2.4)$$

siendo t_0 el tiempo necesario para que el sistema ingrese en estado estacionario, a la constante τ se le denomina el periodo del sistema.

2.2.3. Estado estacionario cuasiperiódico

Se dice que un sistema adquiere una dinámica cuasiperiódica si dado un estado \mathbf{u}_0 para un tiempo t_0 y $\forall \epsilon > 0$ existe un Δt_ϵ tal que

$$|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(t_0 + \Delta t_\epsilon)| < \epsilon, \quad (2.5)$$

donde $|\cdot|$ es una norma definida en el espacio de estados. Es decir, si el sistema comienza su evolución en el estado \mathbf{u}_0 , al transcurrir un tiempo determinado, el sistema se encontrará en un estado arbitrariamente cercano al inicial.

2.2.4. Estado estacionario caótico

A diferencia de los estados anteriores, este estado asintótico es identificado usando muchas definiciones, algunas de las cuales resultan ser no equivalentes entre sí. De manera que, en el marco de este trabajo se utilizará la definición de [10] donde todo sistema, para ser denominado caótico, debe cumplir con las siguientes condiciones:

- I. Sensibilidad a las condiciones iniciales.
- II. El conjunto de todos sus puntos periódicos es denso en \mathcal{E} .
- III. El sistema debe ser topológicamente transitivo.

2.3. Sistemas dinámicos continuos:

Un sistema dinámico donde $t \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ con $0 < m \leq 3$ es denominado un sistema dinámico continuo. Este tipo de sistema en general es modelado mediante el uso de ecuaciones diferenciales, bien sea parciales cuando el sistema es extendido (2.6) u ordinarias cuando es localizado (2.7).

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}); \quad (2.6)$$

$$\frac{d\mathbf{u}(t)}{dt} = \phi(\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0; \quad (2.7)$$

En el caso en que las ecuaciones anteriores sean lineales, existen un conjunto de técnicas y herramientas que permiten en un buen número de casos, obtener una solución analítica, algunos ejemplos de estas técnicas y sus aplicaciones pueden encontradas en [11, 12]. No obstante, si las ecuaciones son no lineales el conjunto de técnicas es limitado, aún en casos donde las ecuaciones sean simples.

2.4. Parcialmente discretos

Un sistema dinámico donde $t \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^m$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ con $0 < m \leq 3$ se denomina parcialmente discreto. La evolución de estos sistemas se describe mediante ecuaciones de recurrencia. Cuando el sistema es localizado se utiliza un mapa discreto(2.8), mientras que cuando el sistema es extendido se utilizan redes de mapas acoplados(2.9).

$$\mathbf{u}_{t+1} = \phi(\mathbf{u}_t), \quad \mathbf{u}_{t=0} = \mathbf{u}_0; \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_{t+1}^i = \phi(\mathbf{u}_t^j), \quad \mathbf{u}_{t=0}^j = \mathbf{u}_0^j; \quad j \in \mathcal{I} \quad (2.9)$$

siendo \mathcal{I} un conjunto de índices discretos que representan la extensión espacial e $i \in \mathbb{Z}$ un número que representa la ubicación del punto de estudio¹. Estos

¹Nótese que en este caso, se requiere de un solo índice para ubicar el punto en cuestión, dado que el sistema es unidimensional. Para sistemas de dimensión mayor se requiere de mas índices.

mapas por si solo tienen una relevancia importante en el ámbito de los sistemas dinámicos, dado que aparecen naturalmente al utilizar técnicas como la sección de Poincaré y en modelos simplificados de ecuaciones diferenciales como el mapa logístico y el mapa de Hénon [13].

El cálculo de la órbita en el caso de los mapas, es mucho mas simple que en el caso de las ecuaciones diferenciales, dado que una vez provisto el estado inicial, basta con iterarlo t veces para obtener el estado en el tiempo t . Sin embargo este proceso es realizado generalmente por medio de computadoras, las cuales solo trabajan con variables con un número de decimales finito, esto conlleva a grandes errores de redondeo para tiempos muy grandes.

2.5. Sistemas discretos. Autómatas Celulares

Un sistema dinámico donde $t \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^m$ y $\mathbf{u} \in \mathbb{N}^n$ con $0 < m \leq 3$ se denomina totalmente discreto. Un tipo de sistema totalmente discreto y que constituye el principal tema de estudio en todo lo que sigue, son los autómatas celulares.

2.5.1. Definición y representación

Los autómatas celulares son un sistema dinámico, totalmente discreto y espacialmente extendido, donde \mathbf{x} y \mathbf{u} pertenecen a conjuntos finitos. Estos pueden ser considerados como un conjunto de subsistemas que interactúan local y simultáneamente, induciendo una evolución global, a estos subsistemas se les denomina automatón. Una forma de representar los autómatas, es mediante una red, donde los automatones son representados por una celda y en el interior de la misma el estado del automatón es representado por un símbolo o un color.

Figura 2.1: Autómata celular en 1D. En este caso el autómata es representado por una red lineal finita.

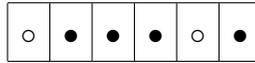
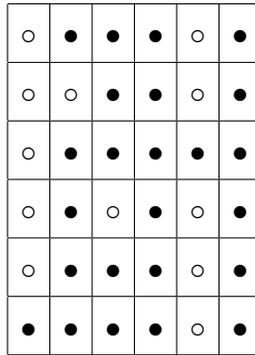


Figura 2.2: Autómata celular en 2D. En este caso el autómata es representado por una red cuadrada finita.



En la figura 2.1 y 2.2 observamos una representación de un autómata celular de estados binario unidimensional y bidimensional respectivamente. Donde los estados en ambos casos están representados por los símbolos $\{\bullet, \circ\}$.

Otra forma de representar un autómata celular es mediante vectores o matrices, donde la posición de las componentes y sus magnitudes representan los automates y sus estados respectivamente. En lo que sigue, se trabajará únicamente con autómatas representados en una red lineal unidimensional, por ende se desarrolla a continuación, la representación vectorial de este tipo de autómatas.

Considérese un autómata unidimensional de s estados y N automates dispuestos en una red lineal. Enumerense los automates de izquierda a derecha comenzando por el número 1. Sea $\mathcal{E}_i \subset \mathbb{N}$ un conjunto finito de s

elementos que representan los posibles estados de cada automatón. Sea $u_i \in \mathcal{E}_i$ el estado del automatón i -ésimo. El vector:

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$$

es entonces el estado del sistema y una representación del autómata celular.

2.5.2. Evolución de los automatas celulares

La evolución de un autómata celular es el resultado de la aplicación de una dinámica local entre los automates, que induce una dinámica global en todo el autómata. De manera que un automatón interactúa solo con ciertos automates pertenecientes a su vecindad por lo que a estos automates se les denomina vecinos.

Existen muchas formas para definir los vecinos, en una red lineal unidimensional. Una manera es mediante dos parámetros $r_l, r_r \in \mathbb{N}$ que constituyen respectivamente el radio izquierdo y el radio derecho es decir, r_l es el número de automates adyacentes a la izquierda del automatón considerado, mientras que r_r es el número de automates a la derecha. Para $r_l = 2$ y $r_r = 4$ en la figura 2.3 se observa una representación de la vecindad del automaton i -ésimo, siendo los automates azules los que conforman la vecindad izquierda y los rojos los que conforman la vecindad derecha.

Como los autómatas son finitos, hay que definir las condiciones de frontera para poder describir la dinámica. En nuestro caso, consideremos autómatas con condiciones de frontera periódicas, en las figuras 2.4 y 2.5 se observa una representación gráfica de la vecindad del automatón i -ésimo bajo estas condiciones de frontera.

La interacción entre un automatón y sus vecinos viene dada por una

Figura 2.3: Representación de los vecinos del automatón i -simo el color azul es usado para indicar los vecinos izquierdos mientras que el rojo los derechos, es importante no confundir el uso de colores con nuevos estados dado que para los estados en estos autómatas solo estamos usando símbolos.

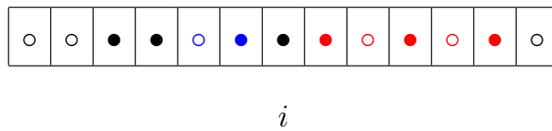


Figura 2.4: Representación de los vecinos del automatón i -ésimo para $r_l = 2$ y $r_r = 5$

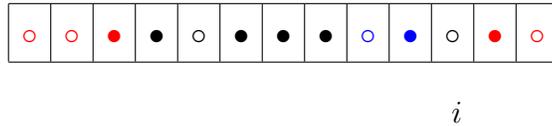
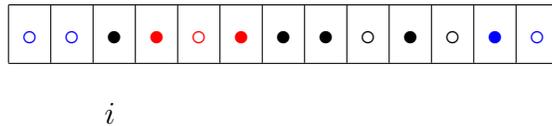


Figura 2.5: Representación de los vecinos del automatón i -ésimo para $r_l = 4$ y $r_r = 3$



función

$$\phi_i : (u_{i-r_l}, \dots, u_i, \dots, u_{i+r_r}) \longrightarrow \mathcal{E}_i$$

que es llamada la regla local de evolución. El conjunto de reglas $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$ es aplicado de manera simultanea en el autómata induciendo una regla global:

$$\phi : \mathbf{u} \longrightarrow \mathcal{E}$$

De forma que, la evolución del autómata puede ser dada mediante un conjunto de reglas locales o una regla global. Como los autómatas son finitos, el número de reglas posibles también lo es. Para un autómata de s estados y N automatonnes, con un tamaño de vecindad $v = r_l + r_r + 1$ se tienen s^{s^v} posibles reglas locales y s^{Ns^N} reglas globales[6].

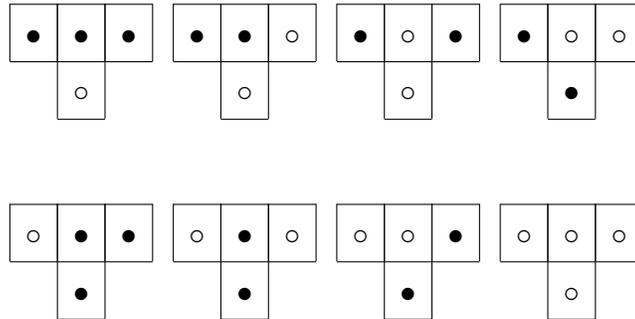
La elección de los parámetros r_l y r_r depende del sistema que se quiera modelar, en [5] se observan algunas elecciones particulares para algunos sistemas particulares. Por motivos de simplicidad, se utilizará en lo que sigue $r_l = r_r = 1$ y además se considerarán solo autómatas de dos estados, este tipo de autómatas es denominado autómata celular elemental o ECA [5] por sus siglas en ingles. Para estos casos se tienen $2^{2^3} = 256$ reglas locales.

2.5.3. Notación del Wolfram y clasificación de las reglas de evolución

Toda regla para un autómata puede ser definida como una tabla de verdad, en el caso de los ECA esta tabla de verdad puede ser relacionada directamente con un número binario. A continuación se muestra la tabla de verdad para una regla arbitraria:

Si consideramos $\bullet = 1$ y $\circ = 0$, el arreglo constituido por todas las posibles salidas es 00011110 y este arreglo es único para cada regla. S. Wolfram

Figura 2.6: Tabla de verdad para un autómata celular elemental.



tomando ventaja de esta unicidad, utiliza el arreglo para identificar todas las reglas considerándolo como un número binario, convirtiéndolo luego a un número decimal[5]. Así pues, en este caso

$$00011110_2 = 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

$$00011110_2 = 16 + 8 + 4 + 2$$

$$00011110_2 = 30_{10}$$

De manera que la regla definida en la figura 2.6 representa a la regla 30 según la clasificación de Wolfram.

Wolfram además, estudió el comportamiento dinámico de las 256 reglas de manera cualitativa, clasificándolas en los siguientes tipos[5]:

- ECA de Clase I: Independientemente del estado inicial el comportamiento converge rápidamente a un punto fijo. Cualquier tipo de estructura inicial desaparece.

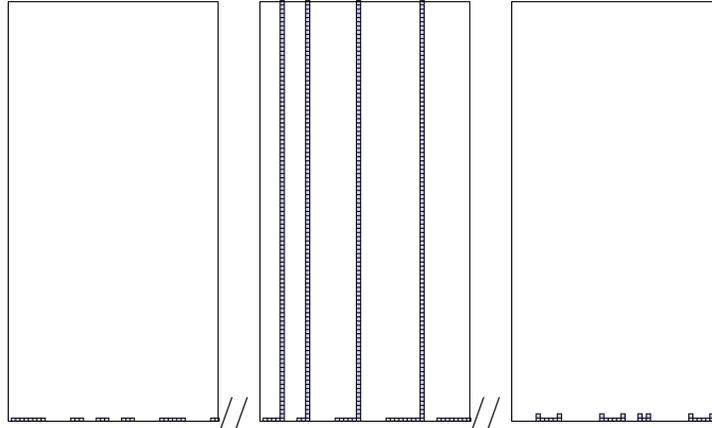


Figura 2.7: Reglas clase I. A la izquierda la regla 32, en el centro la regla 100 y a la derecha la regla 200. El eje horizontal representa el espacio y el eje vertical representa el tiempo.

- ECA de Clase II: Independientemente del estado inicial el comportamiento converge a un sistemas periódico. La mayor parte de la estructura inicial se preserva durante la evolución

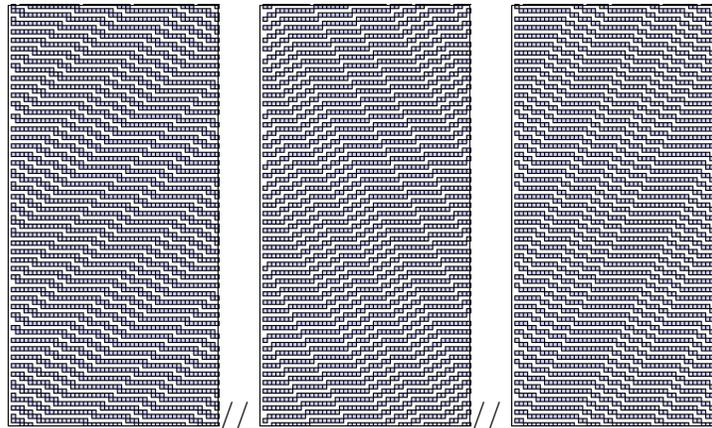


Figura 2.8: Reglas clase II. A la izquierda la regla 11, en el centro la regla 17 y a la derecha la regla 35. El eje horizontal representa el espacio y el eje vertical representa el tiempo.

- ECA de Clase III: La evolución del sistema es pseudo-aleatoria y caótica. Cualquier tipo de estructura inicial desaparece.

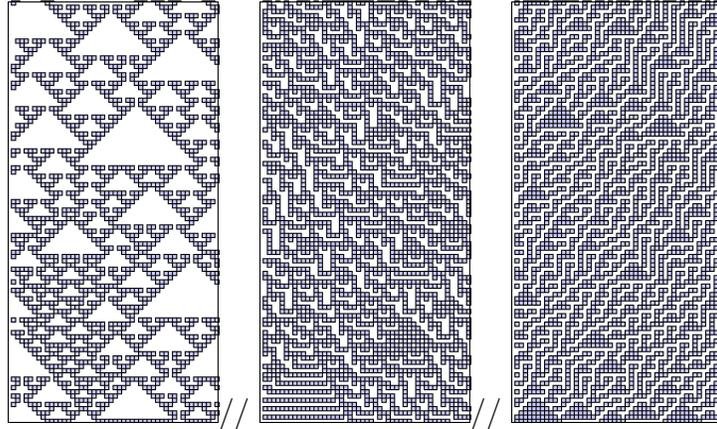


Figura 2.9: Reglas clase III. A la izquierda la regla 30, en el centro la regla 45 y a la derecha la regla 149. El eje horizontal representa el espacio y el eje vertical representa el tiempo.

- ECA de Clase IV: Casi cualquier de condición inicial evoluciona en estructuras que interaccionan mutuamente generando una dinámica compleja.

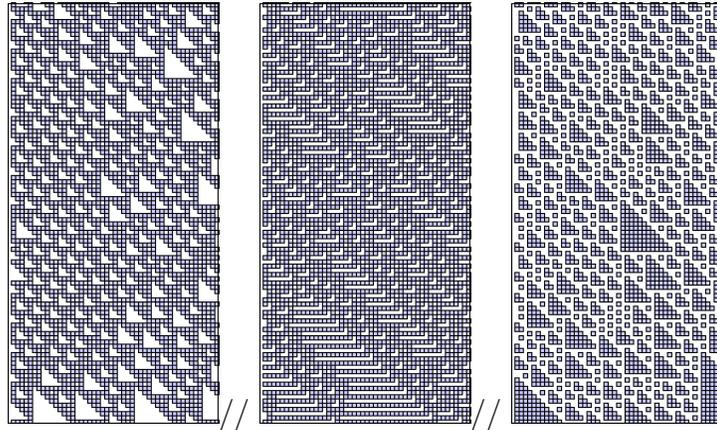


Figura 2.10: Reglas clase III. A la izquierda la regla 110, en el centro la regla 121 y a la derecha la regla 137. El eje horizontal representa el espacio y el eje vertical representa el tiempo.

Capítulo 3

Sincronización perfecta en sistemas continuos y parcialmente discretos.

3.1. Definición

Considérese dos sistemas $(\mathbf{u}, \phi, \mathcal{E}_u)$ y $(\mathbf{v}, \psi, \mathcal{E}_v)$ acoplados mediante una función

$$\mathcal{A} : \mathcal{E}_u \times \mathcal{E}_v \longrightarrow \mathcal{E}_v$$

Cuya dinámica está descrita por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t') &= \phi(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}); \quad t' > t \\ \mathbf{v}(t') &= \psi(\mathbf{v}(t), \mathcal{A}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)), \mathbf{y}); \quad t' > t \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0; \end{aligned} \tag{3.1}$$

los sistemas sincronizarán perfectamente en un tiempo T y bajo la

norma $|\cdot|$ si:

$$|\mathbf{u}(t) - \mathbf{v}(t)| = 0; \quad \forall t \geq T \quad (3.2)$$

El acople utilizado en (3.1) es lo que se conoce como un acople unidireccional o maestro-esclavo, también existe otro tipo de acople denominado bidireccional o acople simétrico[8]. No obstante, debido a que nuestro interés se enfoca en sincronización maestro-esclavo, en este trabajo todos los acoples deben ser considerados como unidireccionales a menos de que se especifique lo contrario.

3.2. Sincronización en sistemas parcialmente discretos

Considérese dos mapas caóticos localizados de estados u y v , acoplados mediante un operador \mathcal{A} y regidos por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= \phi(u_t) \\ v_{t+1} &= \phi(v_t, \mathcal{A}(u_t, v_t)) \\ u_{t=0} &= u_0, \quad v_{t=0} = v_0; \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para que \mathcal{A} sea un acople particular que promueva sincronización, debe satisfacer las siguientes condiciones [8]:

- I. $\mathcal{A}(u_t, u_t) = 0$
- II. $|\mathcal{A}(u_t, v_t)| < |v_t - u_t|$. Para alguna norma definida.

Por ejemplo, una forma de acoplar (3.3) que satisface las condiciones anteriores viene dada por:

$$\begin{aligned}
u_{t+1} &= \phi(u_t) \\
v_{t+1} &= \phi(v_t) + \alpha(u_t - v_t); \quad 0 < \alpha < 1
\end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $\mathcal{A}(u_t, v_t) = \alpha(u_t - v_t)$. Probar ambas condiciones es inmediato de la definición de \mathcal{A} , algunos otros acople pueden ser encontrados en [8].

3.3. Sincronización en sistemas continuos

La extensión del acople y las condiciones de sincronización de mapas discretos a ecuaciones diferenciales ordinarias es directa. Por ende en esta sección el enfoque será hacia las ecuaciones diferenciales parciales o PDE. Considerese 2 sistemas continuos descritos por las ecuaciones:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \phi(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{A} \Delta(\mathbf{x}, t) \tag{3.6}$$

Donde \mathcal{A} es un operador de acople y $\Delta(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Por otra parte, la función ϕ puede ser representada como una expansión en serie de Taylor, alrededor de un punto arbitrario $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Por ejemplo:

$$\phi(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) + J_\phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))\Delta(\mathbf{x}, t) + \mathcal{N}_\phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \tag{3.7}$$

Donde $J_\phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$ es la matriz Jacobiana de ϕ evaluada en $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y \mathcal{N}_ϕ es un operador que contiene los términos de orden superior del desarrollo¹.

¹En el apéndice A se realiza el desarrollo en serie de Taylor hasta el término lineal con detalle

Esta separación permite proponer un acople $\mathcal{A} = J_\phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t))$, de esta manera la ecuación para la diferencia es:

$$\frac{\partial \Delta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathcal{N}_\phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)); \quad (3.8)$$

Por ende se inducirá sincronización sí se exige:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{N}_\phi(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0; \quad (3.9)$$

Esta es solo una de las muchas formas que puede tomar el operador \mathcal{A} , algunos otros acoples pueden ser encontrados en [8]. Encontrar un \mathcal{A} para lograr una sincronización óptima depende del problema particular y es un problema abierto en sistema con muchos grados de libertad.

Capítulo 4

Esquemas de sincronización en autómatas celulares

En el capítulo anterior se explicó, en líneas generales, cómo se logra la sincronización en el caso de ecuaciones diferenciales y mapas. En este capítulo se intenta realizar una extensión de las técnicas y los razonamientos utilizados anteriormente para desarrollar un esquema de sincronización determinista aplicable a los autómatas celulares elementales. Este esquema será comparado con el desarrollado por F. Bagnoli y R. Ritchman [14].

Considerense dos autómatas $(\mathbf{u}^t, \phi, \{0, 1\}^N)$ y $(\mathbf{v}^t, \psi, \{0, 1\}^N)$, el primero denominado maestro y el segundo denominado esclavo, con ecuaciones de evolución:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{t+1} &= \phi(\mathbf{u}^t) \\ \mathbf{v}^{t+1} &= \phi(\mathbf{v}^t)\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\mathbf{u}^0 \neq \mathbf{v}^0.\tag{4.2}$$

Si los autómatas son caótico, al estar desacoplados y poseer condiciones iniciales diferentes, no puede ocurrir sincronización y aún si ocurre, sería en períodos de tiempo muy largos y solo por la naturaleza finita de sus estados. De manera que una manera de inducir sincronización es acoplando ambos sistemas mediante un operador \mathcal{A} :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{t+1} &= \phi(\mathbf{u}^t) \\ \mathbf{v}^{t+1} &= \phi(\mathbf{v}^t) \oplus \mathcal{A} \otimes (\phi(\mathbf{u}^t) \oplus \phi(\mathbf{v}^t)),\end{aligned}\tag{4.3}$$

donde \mathcal{A} es una matriz binaria aún por determinar y los operadores binarios \otimes y \oplus representan los operadores lógicos AND y XOR respectivamente y sustituirán a los operadores producto y suma en todas las operaciones, a menos de que se especifique lo contrario. El autómata diferencia se define como sigue:

$$\Delta^t = \mathbf{u}^t \oplus \mathbf{v}^t.\tag{4.4}$$

De manera que, ocurrirá sincronización perfecta en un tiempo T si se cumple la condición:

$$|\Delta^t| = 0; \quad \forall t > T,\tag{4.5}$$

donde $|\cdot|$ es la norma ℓ_1 , distancia rectilínea o norma taxicab [15]. Al número $|\Delta^t|$ usualmente se le llama la distancia Hamming[2].

4.1. Sincronización por medio de un acople estocástico

Una de las propuestas para elegir la matriz de acople fue dada en[17]:

$$\mathcal{A}_{ij} = \sigma_i^t \delta_{ij} \quad (4.6)$$

Siendo δ_{ij} la delta de Kroenecker y σ_i^t una vector determinado como sigue:

$$\sigma^t = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases} \quad (4.7)$$

A su vez el vector σ^t es seleccionado en cada iteración, con lo que la matriz \mathcal{A} cambia con el tiempo. En la figura 4.1 se observa como evolucionan el autómata maestro, esclavo y diferencia sometidos al acople anterior, para las reglas 110 y 45 con condiciones iniciales aleatorias y un valor de p arbitrario. Se observa que el esquema de sincronización estocástico dinámico o SED logra inducir una sincronización en los sistemas. Por otra parte, en la figura 4.2 se observa que existe un cierto valor de $p = p_c$, por encima del cual siempre ocurre sincronización.

En este esquema el parámetro p está relacionado con el número de sitios perturbados instantáneamente. No obstante, es importante recalcar que perturbar un número pequeño de sitios instantáneamente no implica perturbar pocos sitios en términos de la evolución global. De hecho, por la naturaleza aleatoria del acople, en algún momento de la evolución se habrán perturbado todos los sitios.

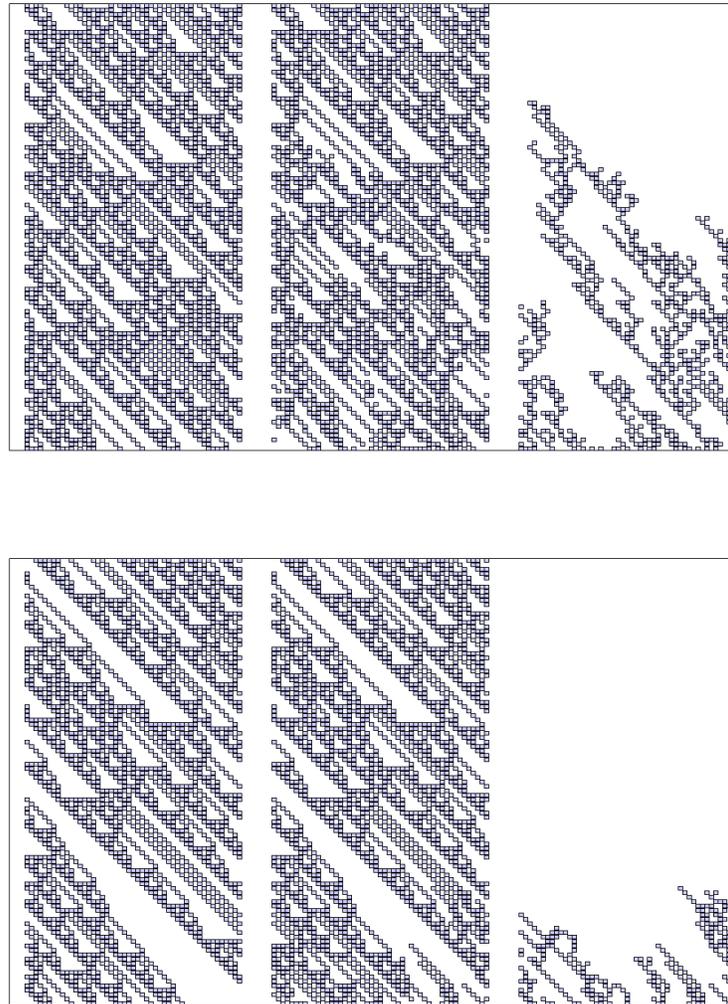


Figura 4.1: Evolución del autómata maestro, esclavo y diferencia para la regla 110 y 45 bajo el esquema SED con $p = 0,25$. El eje horizontal representa el espacio y el eje vertical representa el tiempo

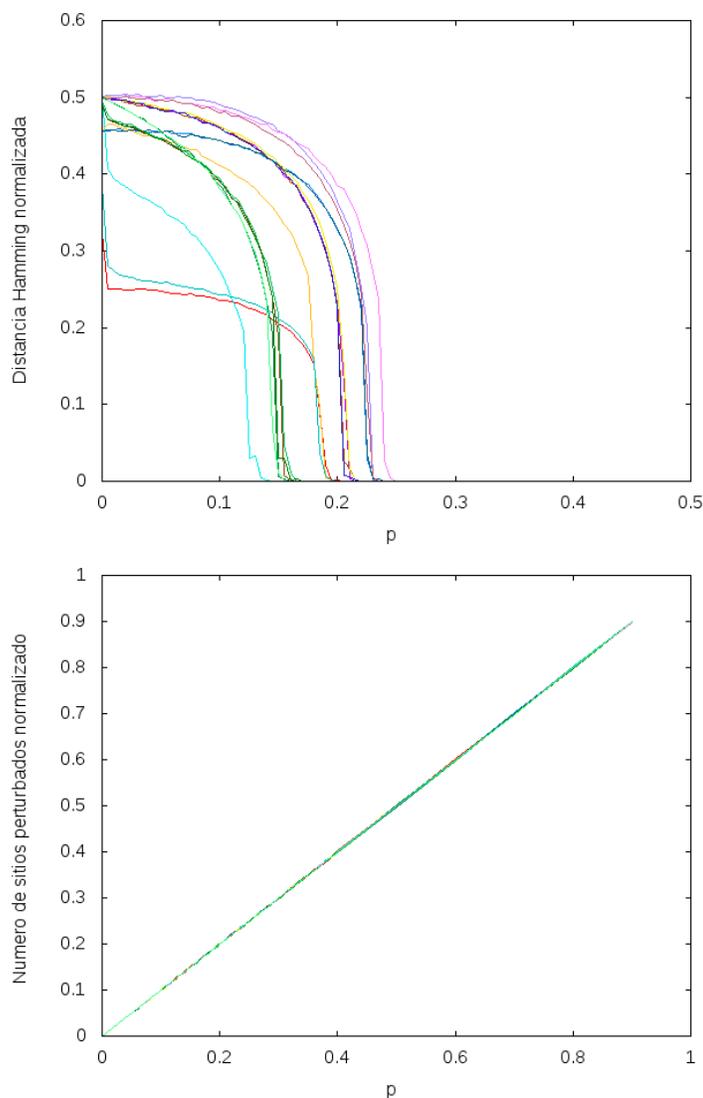


Figura 4.2: Distancia Hamming (arriba) y número de sitios perturbados(abajo) vs p para todas las reglas clase III y clase IV después de 300 iteraciones bajo un acople SED para $N = 100$.

Una variante del esquema SED consiste en elegir una matriz diagonal aleatoria \mathcal{A} en $t = 0$ y mantenerla fija durante toda la evolución. A este variante se le denominará esquema de sincronización estocástico fijo ó SEF. En

la figura 4.3 se observa la evolución del autómata maestro, esclavo y diferencia para las reglas 110 y 45 bajo el esquema SEF y un parámetro p arbitrario, confirmando que esta variante también logra inducir una sincronización. Por otra parte, en la figura 4.4 se observa como también existe un cierto valor de p_c por encima del cual, para algunas reglas siempre ocurre sincronización.

En este caso, p está directamente relacionado con el número de sitios perturbados a nivel de la evolución global. Como se observa en la figura 4.4 algunas reglas sincronizan en promedio para $p_c \sim 0,4$ otras para $p_c \sim 0,8$ y un grupo pequeño no sincroniza para ningún p . En contraste con el esquema SED, donde prácticamente se perturban todos los sitios, esta variante presenta una mejoría para casi todas las reglas, puesto que se induce sincronización perturbando un subconjunto de sitios del autómata.

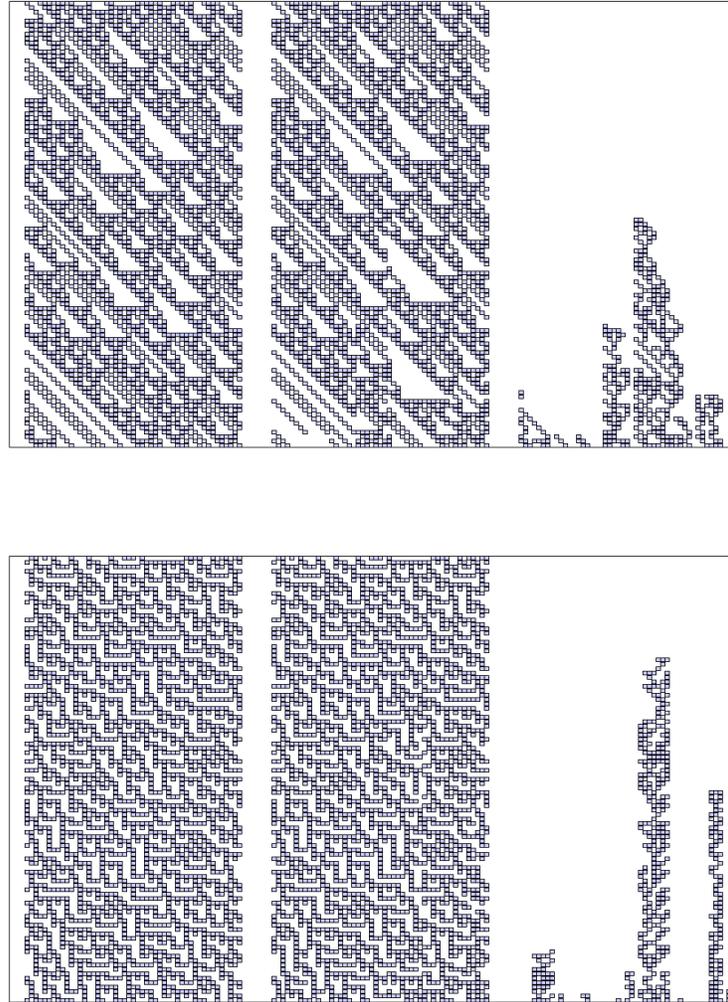


Figura 4.3: Evolución del autómata maestro, esclavo y diferencia para la regla 110 y 45 bajo un esquema SEF con $p = 0,65$. El eje horizontal representa el espacio y el eje vertical representa el tiempo

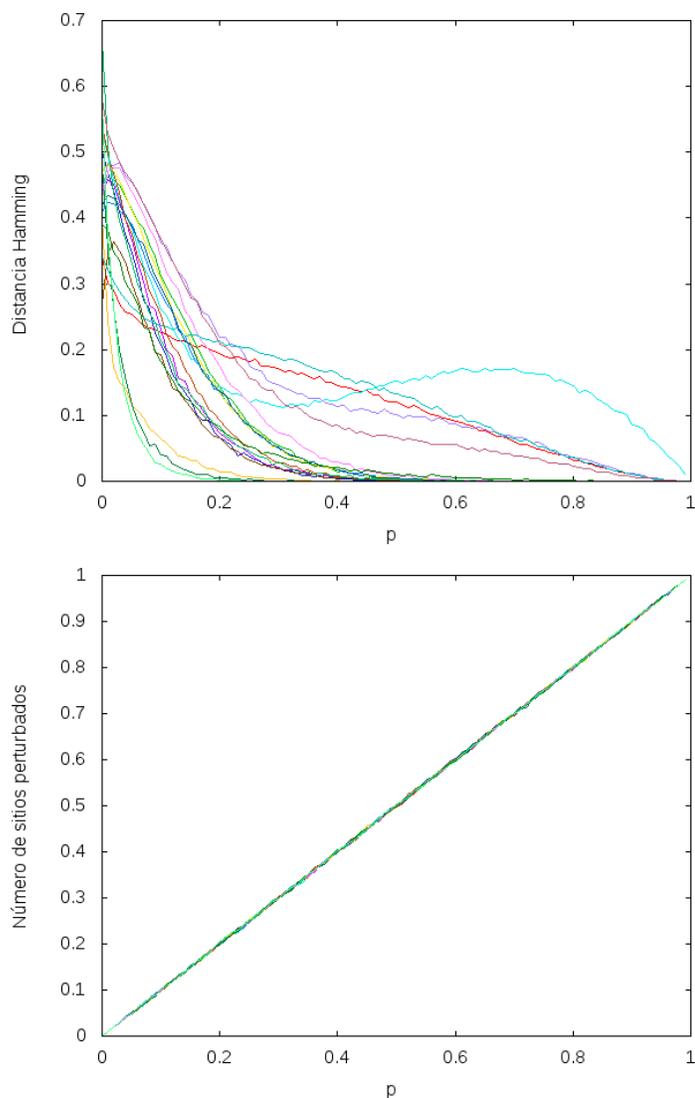


Figura 4.4: Distancia Hamming (arriba) y número de sitios perturbados(abajo) vs p para todas las reglas clase III y clase IV después de 300 iteraciones bajo un acople SEF para $N = 100$

No obstante, la elección de un acople de manera totalmente aleatoria es muy inconsistente, puesto que es imposible determinar a priori si la matriz seleccionada inducirá sincronización. Es esta incertidumbre lo que motiva la búsqueda de un esquema determinista que permita predecir la matriz \mathcal{A} en

función de la dinámica propia del sistema.

4.2. Sincronización por medio de un acople determinista

En [16] se define la derivada booleana para la función de evolución de un autómata respecto al sitio u_i , evaluada en el estado \mathbf{u} como:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial u_i} = \phi(u_1, \dots, u_i, \dots, u_N) \oplus \phi(u_1, \dots, u_i \oplus 1, \dots, u_N) \quad (4.8)$$

Es decir la derivada booleana mide que tanto es afectada la evolución del sistema ante cambios pequeños del mismo, donde pequeño en los autómatas significa, cambios en un sitio. La derivada también está definida para las reglas locales y es una mera extensión de la definición anterior. De manera que, la derivada de la regla local ϕ_i definida sobre una vecindad $v = r_l + r_r + 1$ en función del sitio u_j se define como

$$\frac{\partial \phi_i(V_i)}{\partial u_j} = \begin{cases} \phi_i(V_i) \oplus \phi_i(u_{i-r_l}, \dots, u_j \oplus 1, \dots, u_{i+1}) & \text{si } u_j \in V_i \\ 0 & \text{si } u_j \notin V_i \end{cases} \quad (4.9)$$

Donde V_i representa la vecindad de u_i . Dada la derivada, es posible definir la matriz Jacobiana mediante un símil con el caso continuo:

$$J_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{\partial \phi_i(V_i)}{\partial u_j} \quad (4.10)$$

Considérese que el sistema 4.2 está acoplado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{t+1} &= \phi(\mathbf{u}^t) \\ \mathbf{v}^{t+1} &= \phi(\mathbf{v}^t) \oplus \mathcal{A} \Delta^t \\ \mathbf{u}^0 &\neq \mathbf{v}^0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

por lo que la ecuación para la diferencia es:

$$\Delta^{t+1} = \phi(\mathbf{u}^t) \oplus \phi(\mathbf{v}^t) \oplus \mathcal{A} \Delta^t$$

expandiendo la ecuación anterior y tomando solo la parte lineal se obtiene:

$$\Delta^{t+1} \approx (J \oplus \mathcal{A}) \Delta^t$$

La ecuación anterior evidencia un posible acople dado por $\mathcal{A} = J$, el cual depende enteramente de la dinámica del sistema. Bajo este acople las ecuaciones de evolución quedarían de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{t+1} &= \phi(\mathbf{u}^t) \\ \mathbf{v}^{t+1} &= \phi(\mathbf{v}^t) \oplus J \otimes \Delta^t \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{u}^0 \neq \mathbf{v}^0 \quad (4.13)$$

Si el sistema es lineal $\phi(\mathbf{u}^t) = J \otimes \mathbf{u}^t$ se obtendrá sincronización en una iteración, para sistema no lineales se puede esperar que dicha sincronización no ocurra. No obstante mas adelante observaremos que no solo ocurre sino que puede ser mejorada.

En la gráfica 4.5 se muestra la distancia Hamming en función del tiempo al utilizar el Jacobiano como acople, como se observa ocurre sincronización perfecta para casi todas las reglas, excepto las reglas 18 y 54, sin embargo ambas reglas fueron llevadas a un estado de punto fijo con lo que puede ser considerado como un cierto tipo de sincronización imperfecta. Este esquema de sincronización posee dos grandes desventajas; no existe ningún parámetro de control que regule la intensidad de la perturbación y además el Jacobiano cambia con cada iteración. Para solucionar estas dificultades se reemplaza el Jacobiano con una función \mathcal{J} , constante en el tiempo y sujeta a un parámetro de control q :

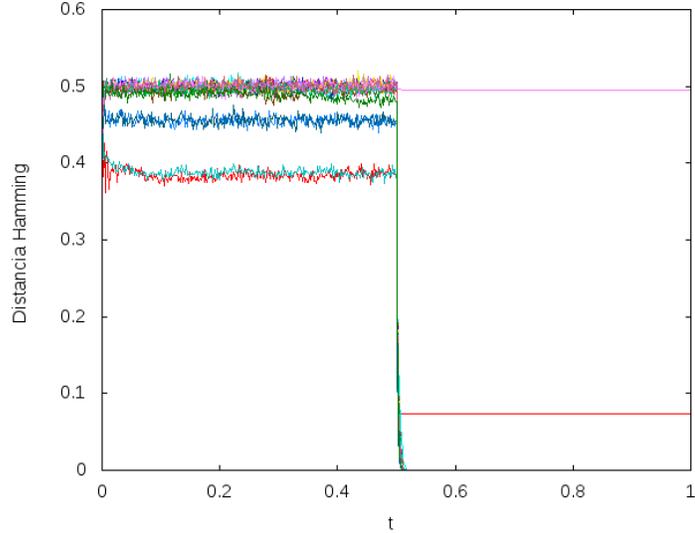


Figura 4.5: Distancia Hamming vs t . Para todas las reglas Clase III y Clase IV, acopladas con el Jacobiano en $t = 0,5$ con $N = 100$.

$$\mathcal{J}_{ij} = H \left(q + \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T J_{ij}^t \right); \quad 0 \leq q \leq 1 \quad (4.14)$$

Donde $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, N$, H es la función de Heaviside y T es un tiempo arbitrario donde se monitorea el Jacobiano. La función \mathcal{J} cuenta cuántas veces un sitio del Jacobiano se encuentra en 1 en el transcurso del tiempo T , seleccionando solo los sitios que superen el umbral definido por el parámetro q . \mathcal{J} es una especie de Jacobiano promedio, donde solo los sitios que estuvieron activos un número determinado de las veces son acoplados. Para $q = 0$ la matriz de acople posee 1 en todos los elementos de la tridiagonal, mientras que para $q = 1$ es la matriz 0.

El parámetro q permite de alguna manera regular el tamaño de la perturbación. No obstante, es posible disminuir aun mas el número de sitios de acople utilizando una información extra que suministra el Jacobiano. Exami-

nemos cuidadosamente el significado de la matriz Jacobiana Booleana. Considérese la fila f que denotaremos por $J_{f,j}$, debido al número de vecinos el número de sitios activos en esta fila no puede ser mayor a 3, si $J_{f,j}$ posee 3 sitios activos significa que el automatón f -ésimo modifica sus estado ante cambios en el estado de cualquiera de sus vecinos, por otra parte si $J_{f,j}$ no posee sitios activos significa que ese sitio no es alterado por sus vecinos. De manera que si se define el parámetro

$$F_j = \sum_{i=0}^N J_{ij} \quad (4.15)$$

el mismo puede ser utilizado para medir que tanto es afectado un sitio j por sus vecinos. Considerese ahora la columna $J_{i,c}$, nuevamente el número máximo de sitios activos es 3, si $J_{i,c}$ posee 3 sitios activos significa que el automatón c -ésimo modifica el estado de todos sus vecinos si el cambia su estado, por otra parte si $J_{i,c}$ no posee sitios activos significa que ese sitio no afecta a sus vecinos. De manera que definiendo el parámetro

$$C_i = \sum_{j=0}^N J_{ij} \quad (4.16)$$

Se tiene una manera de medir que tanto afecta un sitio j a sus vecinos. De esta manera la matriz de acople \mathcal{A} puede ser seleccionada de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}_{f,j} = \begin{cases} \mathcal{J}_{f,j} & \text{si } F_j C_j \geq 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.17)$$

La opción mas intuitiva sería considerar en \mathcal{J} solo aquellos sitios donde $F_i = C_i = 3$ es decir solo los sitios mas sensibles que a su vez sean mas

influyentes, no obstante la densidad de sitios con esta característica es baja y además existen varias reglas clase III y IV cuyo Jacobiano presenta un 0 constante en alguna de sus diagonales, por esta razón resulta mas razonable seleccionar los sitios donde $F_i \geq 2$ y $C_i \geq 2$.

Bajo este esquema ocurren tres tipos de comportamientos distintos, como se observa en los gráficos 4.6 y 4.7 y 4.8, además se observa que el número de sitios no está directamente relacionado con el parámetro de control q . En los gráficos 4.9, 4.10 y 4.11 se observa la distancia Hamming en función del número de sitios perturbados. De esta manera observamos que los autómatas del grupo 1 presentan un comportamiento bastante singular dado que se logra inducir sincronización solo con un cierto número de sitios alrededor de 45 % por encima del cual estos autómatas no sincronizan. Los autómatas del grupo 2 se sincronizan siempre al superar el 45 % de los sitios perturbados. Por ultimo los del grupo 3 pueden ser sincronizados en general con un número pequeño de sitios , perturbando una fracción de hasta 25 %.

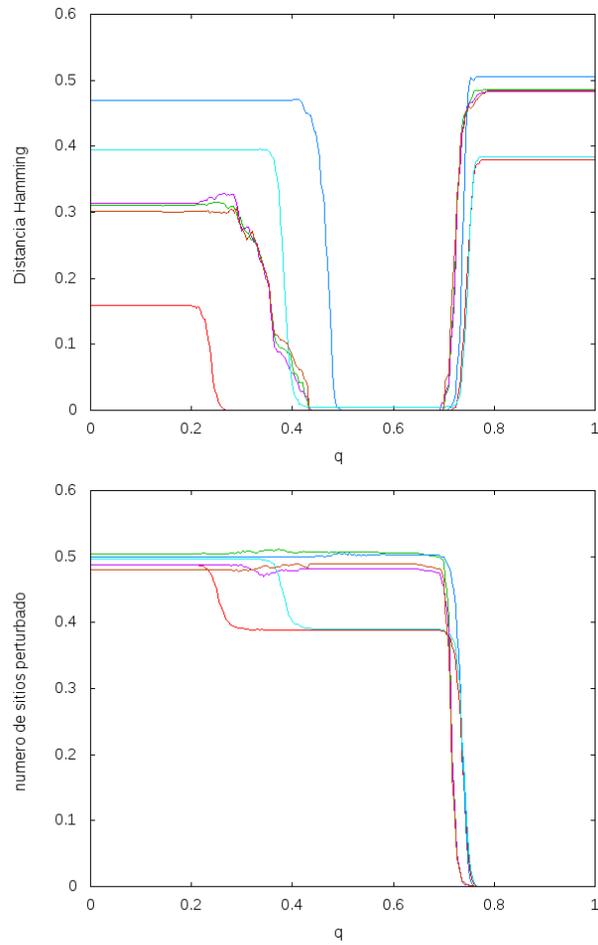


Figura 4.6: Distancia Hamming (izquierda) y número de sitios perturbados(derecha) vs q . Para las reglas 18, 124, 126, 137, 146, 193, después de 300 iteraciones bajo un acople SDE para $N = 100$.

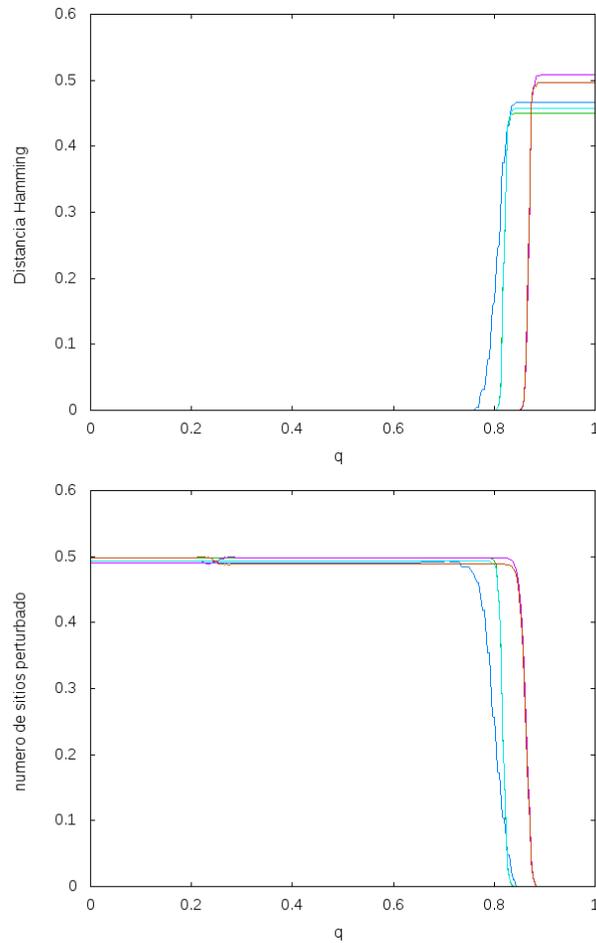


Figura 4.7: Distancia Hamming (izquierda) y número de sitios perturbados(derecha) vs q . Para las reglas 22, 30, 41, 122, 151, 161, después de 300 iteraciones bajo un acople SDE para $N = 100$.

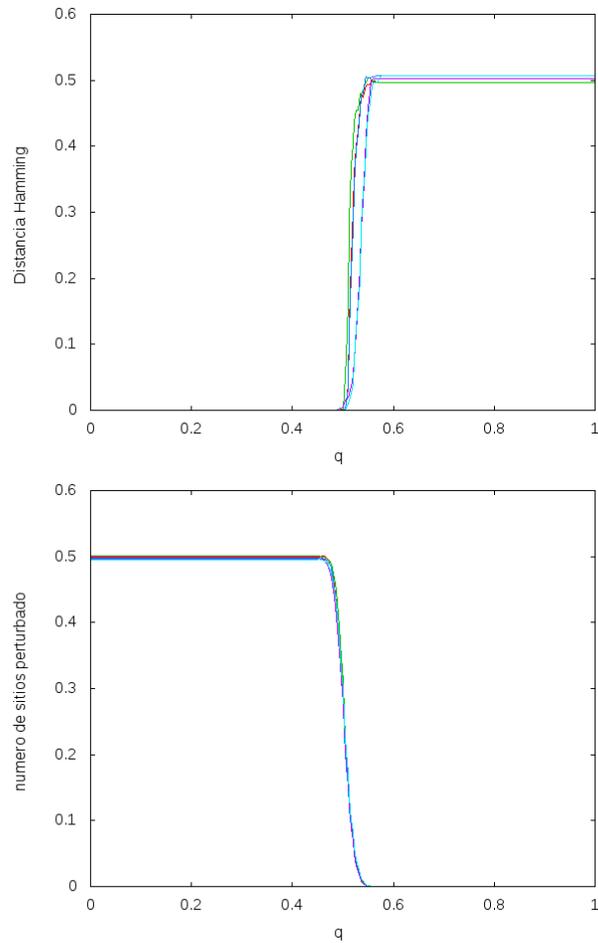


Figura 4.8: Distancia Hamming (izquierda) y número de sitios perturbados(derecha) vs q . Para las reglas 75, 86, 89, 106, 120 después de 300 iteraciones bajo un acople SDE para $N = 100$.

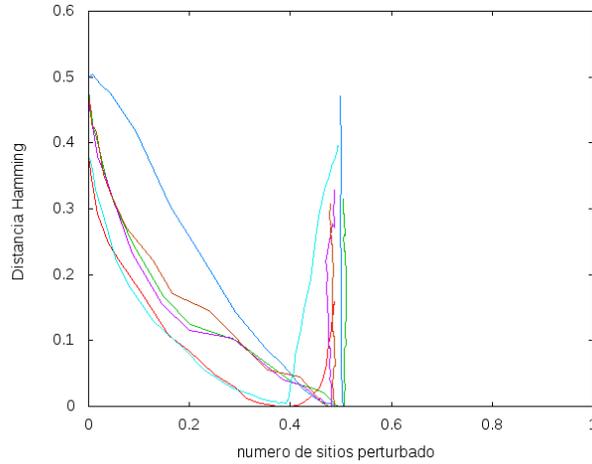


Figura 4.9: Distancia Hamming (izquierda) y número de sitios perturbados(derecha) vs q . Para las reglas 18, 124, 126, 137, 146, 193, después de 300 iteraciones bajo un acople SDE para $N = 100$.

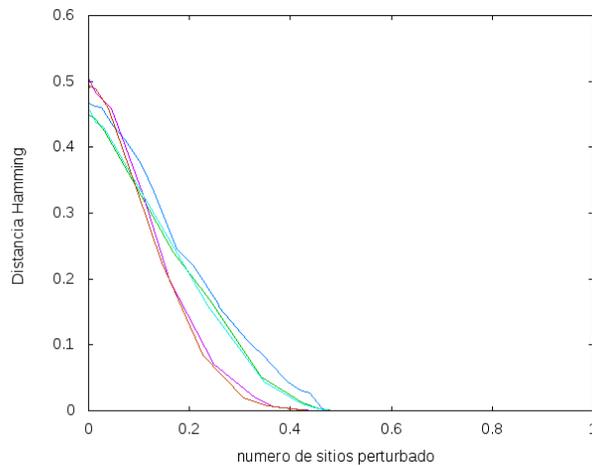


Figura 4.10: Distancia Hamming (izquierda) y número de sitios perturbados(derecha) vs q . Para las reglas 22, 30, 41, 122, 151, 161, después de 300 iteraciones bajo un acople SDE para $N = 100$.

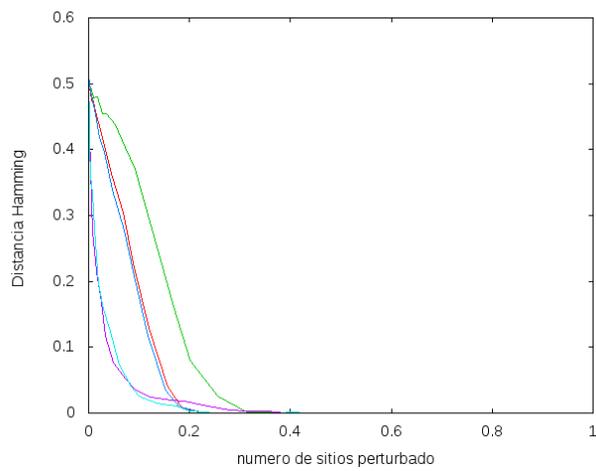


Figura 4.11: Distancia Hamming (izquierda) y número de sitios perturbados(derecha) vs q . Para las reglas 75, 86, 89, 106, 120 después de 300 iteraciones bajo un acople SDE para $N = 100$.

Capítulo 5

Conclusiones

- Por medio del Jacobiano Booleano se diseñó un esquema de acople que permite sincronizar autómatas celulares de clase III y clase IV perturbando solo un conjunto relativamente pequeño de sitios.
- Se logró optimizar este esquema, con respecto a la intensidad de la perturbación, seleccionando los sitios a acoplar por medio del parámetro adicional $F_i C_i$, el cual mide que tanto influye un sitio a sus vecinos y que tanto sus vecinos lo afectan.
- Los resultados obtenidos mejoran, desde el punto de vista de la intensidad de la perturbación con que se logra la sincronización, los resultados presentados en la literatura [14],[17].
- Resultados preliminares sugieren que al aumentar el parámetro continuo q , la transición desde la evolución asíncrona hacia el estado sincronizado puede ser explicada como una transición de fase perteneciente a la clase conocida como percolación directa.

Apéndice A

Jacobiano en sistemas continuos

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un función continua y diferenciable en U . Considerese el entorno definido por la bola abierta $B(x - x_0, r)$ con $x, x_0 \in U$ y $r > 0$. Por el teorema de Taylor, la función f puede ser representada como una serie infinita de potencias en x , donde los coeficientes son determinados a partir de las derivadas de f evaluadas en x_0 . Por ejemplo para el caso particular $n = m = 1$ se obtiene un desarrollo de la forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^n}{n!} \quad (\text{A.1})$$

Cuando $r \ll 1$ los términos de orden $n > 2$ son significativamente menores que los términos de orden cero y uno, por lo tanto pueden ser despreciados. Y la función puede ser aproximada por:

$$f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) \quad (\text{A.2})$$

Para dimensiones mayores el desarrollo puede hacerse utilizando la regla de la cadena. En el caso general $m, n \in \mathbb{N}$ utilizando la base canonica, el desarrollo obtenido es el siguiente:

$$f_i(x) \approx f_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \quad (\text{A.3})$$

Donde $j = 1, 2, \dots, m$. La matriz $J_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ se conoce como matriz Jacobiana o simplemente Jacobiano y la ecuación A.2 representa la parte lineal de la función f .

Bibliografía

- [1] E.Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journal of the Atmospheric Sciences0,(1963).
- [2] N. Boccara, *Modeling Complex Systems*, Springer,(2004).
- [3] M. Holmes, *Introduction to Numerical Methods in Differential Equations*, Springer (2006).
- [4] S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer (2003).
- [5] Wolfram, S. *A New Kind of Science*. Champaign, IL: Wolfram Media, (2002).
- [6] A. Ilachisky *Cellular automata. A discrete universe* , World Scientific, (2001).
- [7] J. Neumann, A. Burks, *Theory of Self-Reproducing Automata*, Univ. of Illinois Press,(1966).
- [8] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*,Cambridge Nonlinear Science Series 12, (2001).
- [9] L. Kocarev, Z. Tasev, T. Stojanovski and U. Parlitz, *Synchronizing spatio-temporal chaos*, CHAOS 7, (1997) .

- [10] R. Devaney *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin-Cummings Publishing Co. (1986)
- [11] Y. Pinchover, J. Rubinstein *An introduction to partial differential equations*, Cambridge University Press, (2005).
- [12] D. Zill *Ecuaciones diferenciales. con Aplicaciones de modelado*, International Thomson, (1997).
- [13] J. Thompson, H. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley & Sons, Ltd 2nd ed. (1999).
- [14] F. Bagnoli, R. Ritchman, *Synchronization and Maximum Lyapunov Exponents of Cellular Automata*, Phys. Rev. E 59, (1999).
- [15] F. Krause *Taxicab Geometry*, Dover, (1987).
- [16] G. Vichniac *Boolean derivatives on cellular automata*, Physica, (1990).
- [17] L. Morelli, D. Zanette, *Synchronization of stochastically coupled cellular automata*, Phys. Rev. E 58, (1998)